

Corrigé TD-1 Suites et Séries

Exercice 1.

Soit $\{u_n\}$ la suite définie pour tout entier naturel par $u_n = n^2 + n + 1$ exprimer en fonction de n les termes suivants : u_{n+1} u_{n-1} u_{2n} u_{3n-1} et la différence $u_{n+1} - u_n$

Corrigé:

$$u_n = n^2 + n + 1$$

$$u_{n+1} = (n+1)^2 + n + 1 + 1 = n^2 + 3n + 3$$

$$u_{n-1} = (n-1)^2 + n - 1 + 1 = n^2 - n + 1$$

$$u_{2n} = (2n)^2 + 2n - 1 = 4n^2 + 2n + 1$$

$$u_{3n-1} = (3n-1)^2 + 3n - 1 + 1 = 9n^2 - 3n + 1$$

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + n + 1 + 1 - (n^2 + n + 1) = 2n + 2$$

Exercice 2.

Etudier la monotonie des suites suivantes :

$$i) u_n = 2n - 1; \quad ii) u_n = \frac{(0.75)^n}{3^n}; \quad iii) u_n = \sqrt{1 + n + n^2}; \quad iv) u_n = (-3)^n$$

Corrigé:

$$i) u_{n+1} - u_n = 2n + 1 - 1 - (2n - 1) = 2n + 1 - 2n = 2n(2 - 1) = 2n > 0$$

Donc (u_n) est strictement croissante

$$ii) u_n = \frac{(0.75)^n}{3^n} \quad u_{n+1} = \frac{(0.75)^{n+1}}{3^{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(0.75)^{n+1}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{(0.75)^n} = \frac{0.75}{3} < 1$$

Donc (u_n) est strictement décroissante

$$iii) u_n = \sqrt{1 + n + n^2} \quad u_{n+1} = \sqrt{n^2 + 3n + 3}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n^2 + 3n + 3}}{\sqrt{1 + n + n^2}} > 1 \quad n^2 + 3n + 3 > 1 + n + n^2$$

Donc (u_n) est strictement croissante

$$iv) u_n = (-3)^n$$

(u_n) n'est pas monotone

Exercice 3.

Soient $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ des suites définies pour tout entier naturel par : $u_n = \frac{3n+1}{n+1}$

d'une part et $v_{n+1} = \ln(2v_n + 1)$ et $v_0 = 1$ d'autre part

1) Montrer que $\{u_n\}$ est majorée par 3 et en déduire qu'elle est bornée.

2) Montrer que pour tout entier naturel n , $1 \leq v_n \leq 2$

Corrigé:

1)

Mq (u_n) est majorée par 3

$$u_n = \frac{3n+3-2}{n+1} = 3 - \frac{2}{n+1}$$

$$\forall n \geq 0, \frac{2}{n+1} > 0$$

$$\text{donc } u_n = 3 - \frac{2}{n+1} < 3$$

alors (u_n) est majorée par 3

$$\text{On a } u_n = 1 \quad u_n < 3$$

donc $1 \leq u_n \leq 3$ donc u_n est bien bornée

2)

Par récurrence

Initialisation $n = 0 \quad v_0 = 1$ (Vrai)

Hérédité supposons que $1 \leq v_n \leq 2$ et montrons que $1 \leq v_{n+1} \leq 2$

$$\text{On a } 1 \leq v_n \leq 2$$

$$2 \leq 2v_n \leq 4$$

$$3 \leq 2v_n + 1 \leq 5$$

$$\ln(3) \leq \ln(2v_n + 1) \leq \ln(5)$$

$$\text{Or } 1 < \ln(3) \text{ et } \ln(5) < 2$$

$$\text{Donc } 1 \leq v_{n+1} \leq 2$$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq v_n \leq 2$

Exercice 4.

Montrer, à partir de la définition de limite, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{n}}{4\sqrt{n+5}} = \frac{3}{4} ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n-5}{n^2} = 0$$

Corrigé:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad \varepsilon > 0$$

$$= \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$= \left| \frac{n+n-1}{n+1} \right| < \varepsilon$$

$$= \left| \frac{-1}{n+1} \right| < \varepsilon$$

$$= \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon$$

$$(n+1)\varepsilon > 1$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \quad \forall n > N_\varepsilon$$

$$N_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil \quad \text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{n}}{4\sqrt{n+5}} = \frac{3}{4}$$

$$= \left| \frac{3\sqrt{n}}{4\sqrt{n+5}} - \frac{3}{4} \right| < \varepsilon$$

$$= \left| \frac{3\sqrt{n}-12\sqrt{n}-15}{16\sqrt{n}+20} \right| < \varepsilon$$

$$= \left| \frac{15}{16\sqrt{n}+20} \right| < \varepsilon$$

$$= \frac{15}{16\sqrt{n}+20} < \frac{15}{16\sqrt{n}} < \varepsilon$$

$$N_{\varepsilon} = \left[\left(\frac{15}{16\varepsilon} \right)^2 \right] \quad \text{Donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{n}}{4\sqrt{n}+5} = \frac{3}{4}$$

Exercice 5.

- 1) Montrons que si la suite $\{a_n\}$ ($a_n > 0$) converge vers a , alors la suite $\{\sqrt{a_n}\}$ converge vers $\sqrt{a}$.
- 2) Soit $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ deux suites réelles convergeant vers l et l' , avec $l < l'$. Montrer qu'à partir d'un certain rang : $u_n < v_n$.
- 3) Soit $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ deux suites réelles telles que $\{u_n + v_n\}$ et $\{u_n - v_n\}$ convergent. Montrer que $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ convergent.

Corrigé:

1)

$$\text{Mq } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$$

Comme $a_n > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$

la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$ si a_n converge vers a et $a \geq 0$ alors $f(a_n)$ vers $f(a)$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$$

2)

$$\text{posons } \delta = \frac{l'-l}{2} > 0$$

par convergence $\exists N_1 / \forall n \geq N_1$

$$\text{on a } |u_n - l| < \delta \quad \text{donc } u_n < l + \delta$$

d'autre part $\exists N_2 / \forall n \geq N_2$

$$|v_n - l'| < \delta \quad \text{donc } v_n > l' - \delta$$

prenons que $N = (N_1; N_2)$

alors $\forall n \geq N$

$$\text{On a } u_n < l + \delta = \frac{l'-l}{2} < l' - \delta < v_n$$

Donc $u_n < v_n$

3)

$$\text{on a } u_n = \frac{(u_n + v_n) + (u_n - v_n)}{2}$$

comme la moyenne de deux suite convergente converge

$\Rightarrow v_n$ converge

$$u_n = \frac{(u_n + v_n) - (u_n - v_n)}{2}$$

comme la différence de deux suite convergente converge

$\Rightarrow v_n$ converge

Exercice 6

Calculer les limites des suites données par les termes généraux suivants :

$$\begin{aligned} 1) u_n &= 1 + \frac{1}{2^n} & 2) u_n &= \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{3}\right)^n & 3) u_n &= \frac{(-3)^n}{2^{n+2}} - 3 & 4) u_n &= 5^n - 4^n \\ 5) u_n &= \frac{3^n + 5^n}{7^n - 6^n} & 6) u_n &= \frac{2n^2 - 3n + 2}{1 - n} & 7) u_n &= \sqrt{n^2 + n} - n & 8) u_n &= \frac{n + (-1)^n n^2}{n^3 + 1} \\ 9) u_n &= \frac{7 + 3n \cos(n^2 + 5)}{6n + 2} & 10) u_n &= \frac{2^n}{n^2} & 11) u_n &= (-1)^n \frac{n^3}{n!} & 12) u_n &= \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{5}{n}\right) \end{aligned}$$

Corrigé:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = 1 \\ 2) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 0 \\ 3) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(-3)^n}{2^{n+2}} - 3\right) \text{ n'existe pas de limite} \\ 4) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (5^n - 4^n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty \\ 5) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3^n + 5^n}{7^n - 6^n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7^n \left(\frac{3^n}{7^n} + \frac{5^n}{7^n}\right)}{7^n \left(1 - \frac{6^n}{7^n}\right)}\right) = 0 \\ 6) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 3n + 2}{1 - n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -2n = -\infty \\ 7) u_n &= \sqrt{n^2 + n} - n \\ 8) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7 + 3n \cos(n^2 + 5)}{6n + 2} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{6n + 2} + \frac{7 + 3n \cos(n^2 + 5)}{6n + 2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{6n + 2} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7 + 3n \cos(n^2 + 5)}{6n + 2} \\ 10) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty \\ 11) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left((-1)^n \frac{n^3}{n!}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0 \\ 12) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{5}{n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercice 7

On introduit les suites $u_n = \cos\left(\frac{2\pi n}{17}\right)$ et $v_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$

Déterminer les limites, quand elles existent, des suites suivantes : $u_n, v_n, u_n + v_n$, et $u_n v_n$

Corrigé:

- (u_n) n'est pas de limite
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$
- $(u_n + v_n)$ ne converge pas car c'est la somme d'une suite qui n'admet pas de limite et d'une suite qui converge

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \cos\left(\frac{2\pi n}{17}\right) \right) = 0$

Exercice 8.

Pour $n \geq 1$, on définit u_n comme la somme de n termes par la formule

$$\text{iii) } u_n = \frac{1}{n + \ln k} \quad \text{ii) } u_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad \text{i) } u_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{iv) } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{K^2 + n^2}$$

$$\text{v) } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{K + n^2} \quad \text{vi) } u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2$$

Corrigé:

$$\text{i) } u_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$S = \frac{Up(1-q^{n-p+1})}{1-q}$$

$$u_n = \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

$$\text{ii) } u_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$u_n \text{ divergente car } \frac{2}{3} > 1$$

$$\text{iii) } u_n = \frac{1}{n + \ln k}$$

$$1 \leq k \leq n$$

$$\ln 1 \leq \ln k \leq \ln(n)$$

$$n \leq \ln k + n \leq \ln(n) + n$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\ln(n) + n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \ln k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}$$

$$\frac{n}{\ln(n) + n} \leq u_n \leq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln(n) + n} = 1$$

$$\text{Donc d'après T.G On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

$$\text{iv) } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{K^2 + n^2}$$

$$0 \leq \frac{1}{K^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$0 \leq u_n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{n^2}$$

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Donc d'après T.G On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

$$v) u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k+n^2}$$

$$1 \leq k \leq n$$

$$1 + n^2 \leq k + n^2 \leq n + n^2$$

$$\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{k+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2}$$

$$\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{k+n^2} \leq \frac{n}{1+n^2}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{k+n^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{1+n^2}$$

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{1+n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1$$

Donc d'après TG On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

$$vi) u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \text{ Or } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{2n^2+3n+1}{6n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2n^2}{6n} = \frac{2n}{6} = +\infty$$

Exercice 9

Soit $\{U_n\}$ la suite réelle définie par : $U_1=2$; $U_{n+1}=\sqrt{3U_n + 4}$

- 1) Montrer que $\{u_n\}$ est majorée par 4.
- 2) Montrer que $\{u_n\}$ est strictement croissante.
- 3) En déduire que $\{u_n\}$ converge et déterminer sa limite.

Corrigé:

1)

$$\text{pour } n = 1 \quad u_1 = 2 < 4 \text{ vrai pour } n = 1$$

on suppose que ce vrai pour n , $u_n \leq 4$

$$\text{Mq } u_{n+1} \leq 4 \quad u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$$

$$u_n \leq 4 \Rightarrow 3u_n \leq 12 \Rightarrow 3u_n + 4 \leq 16 \Rightarrow \sqrt{3u_n + 4} \leq 4 \Rightarrow u_{n+1} \leq 4$$

$$\text{Donc } \forall n \geq 1 \quad u_n \leq 4$$

2)

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{3u_n + 4} - u_n = \frac{(\sqrt{3u_n + 4} - u_n)(\sqrt{3u_n + 4} + u_n)}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$$

$$3u_n + 4 - u_n^2 = -u_n^2 + 3u_n + 4 = -(u_n^2 - 3u_n - 4) = -(u_n - 4)(u_n + 1) \geq 0$$

$$u_{n+1} \geq 0 \quad (1)$$

$$u_n \leq 4$$

$$(u_n - 4) \leq 0 \quad (2)$$

$$\text{de (1) et (2) } u_{n+1} - u_n \geq 0$$

donc (u_n) est strictement croissante

3)

la suite est croissante et majorée donc elle est convergente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$$

$$L = \sqrt{3L + 4}$$

$$L^2 = 3L + 4$$

$$L^2 - 3L - 4 = 0$$

$$\Delta = (-3) - 4(1)(-4) = 25$$

$$L_1 = 4 \quad L_2 = -1 < 0$$

$$\text{Donc } L = 4$$

Exercice 10

$$\text{Calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \text{ lorsque } a_n = \frac{(a_n - 1)^2 + 1}{2} \quad a_1 = 0$$

Corrigé:

- étudions la monotone de a_n

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n)^2 + 1}{2} - a_n = \frac{(a_n)^2 + 1 - 2a_n}{2} = \frac{(a_n - 1)^2}{2} > 0$$

donc (a_n) est croissante

- Supposons que $a_n < 1$

par récurrence

- $0 < 1$ donc elle est vraie pour la 1^{er} terme
- supposons que $a_n \leq 1$
- montrons que $a_{n+1} \leq 1$

$$\text{on a } a_n \leq 1 \Rightarrow (a_n)^2 + 1 \leq 2 \Rightarrow \frac{(a_n)^2 + 1}{2} \leq 1 \Rightarrow a_{n+1} \leq 1$$

donc (a_n) est majorée par 1

a_n est croissante et $a_n \leq 1 \Rightarrow a_n$ est convergente

$$\text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

$$L = \frac{(L)^2 + 1}{2} \Rightarrow 2L = L^2 + 1 \Rightarrow L^2 + 1 - L = 0 \Rightarrow (L - 1)^2 = 0 \Rightarrow L = 1$$

Exercice 11

Considérons la suite définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$ et $u_1 = 1$

$$1) \text{ Montrons que } (u_{n+1})^2 \geq 2$$

$$2) \text{ Montrons que la suite } \{u_n\} \text{ est donc décroissante}$$

3) En déduire que $\{u_n\}$ converge et déterminer sa limite

Corrigé:

1)

$$(u_{n+1})^2 - 2 \geq 0$$

$$\frac{1}{4} \left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)^2 - 2 \geq 0$$

$$\frac{1}{4} \left(u_n^2 + 4 + \frac{4}{u_n^2}\right) - 2 \geq 0$$

$$\frac{1}{4} \left(u_n^2 + 4 + \frac{4}{u_n^2} - 8\right) \geq 0$$

$$\frac{1}{4} \left(u_n^2 - 4 + \frac{4}{u_n^2}\right) \geq 0$$

$$\frac{1}{4} \left(u_n^2 - \frac{2}{u_n}\right) \geq 0$$

$$\text{donc } (u_{n+1})^2 \geq 2$$

2)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - u_n = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} - 2\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{u_n} - u_n\right) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{2 - u_n^2}{u_n}\right)$$

$$2 - u_n^2 \leq 0 \Rightarrow u_n^2 \geq 2 \Rightarrow -u_n^2 \leq 2 \Rightarrow 2 - u_n^2 \leq 2 - 2 \Rightarrow 2 - u_n^2 \leq 0$$

$$\text{donc } u_{n+1} - u_n \leq 0$$

donc (u_n) est bien décroissante

3)

(u_n) est majorée par 2 et décroissante donc elle est convergente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$$

$$L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{2}{L}\right)$$

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{L^2 + 2}{L}\right)$$

$$L = \frac{L^2 + 2}{2L}$$

$$2L^2 = L^2 + 2$$

$$L^2 - 2 = 0$$

$$L^2 = 2$$

$$L = \sqrt{2}$$

Exercice 12

Montrer que les suites de termes généraux $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ sont adjacentes

$$\text{i) } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

$$\text{ii) } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$$

$$\text{iii) } u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{K^2(K+1)^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}$$

Corrigé:

$$i) u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

- étudions la monotone de v_n et u_n

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

Donc (u_n) est strictement croissante.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n!} = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{2}{n+1} - 1 \right) = \frac{1}{n!} \left(\frac{-n+1}{n+1} \right) \leq 0 \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Donc (v_n) est strictement décroissante.

- Calculons la $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = u_n + \frac{1}{n!} - u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$$

Conclusion: $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ sont adjacentes

$$ii) u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$$

- étudions la monotone de v_n et u_n

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

Donc (u_n) est strictement croissante.

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - u_n - \frac{1}{nn!} \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+1)} \right) - \frac{1}{nn!}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{(n+1)} \right) - \frac{1}{n} \right)$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{n+2}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} \right)$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{n(n+2) - (n+2)^2}{n(n+1)^2} \right) = \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{n! (n+2)^2 n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n! (n+2)^2 n} < 0$$

Donc (v_n) est strictement décroissante.

- Calculons la $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} - v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n!n} = 0$$

Conclusion: $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ sont adjacentes

$$\text{iii) } u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{K^2(K+1)^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}$$

- étudions la monotone de v_n et u_n

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{K^2(K+1)^2} - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{K^2(K+1)^2}$$

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{n^2(n+1)^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{K^2(K+1)^2} - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{K^2(K+1)^2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^2(n+1)^2} > 0$$

Donc (u_n) est strictement croissante.

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{3(n+1)^2} - u_n - \frac{1}{3n^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{3(n+1)^2} - \frac{1}{3n^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^2} - \frac{1}{3n^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3n^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{3+n^2}{3n^2} \right) - \frac{1}{3n^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3n^2} \left(\frac{3+n^2}{(n+1)^2} - 1 \right) = \frac{1}{3n^2} \left(\frac{3+n^2-(n+1)^2}{(n+1)^2} \right)$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3n^2} \left(\frac{3+n^2-n^2-2n-1}{(n+1)^2} \right)$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3n^2} \left(\frac{2-2n}{(n+1)^2} \right) = \frac{2(1-n)}{3n^2(n+1)^2} < 0$$

Donc (v_n) est strictement décroissante.

- Calculons la $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} - v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3n^2} = 0$$

Exercice 13.

Etudier la convergence des séries suivantes

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{5^k} ; \quad 2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{3^k} ; \quad 3) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+3}{4+6k} ; \quad 4) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{k(k+2)} ;$$

$$5) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^{k+2} - 5^k}{7^k} ; \quad 6) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} ; \quad 7) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+3}{6k+15}$$

Corrigé:

$$1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{5^k}$$

C'est une somme d'une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5} < 1$ donc elle est convergente .

$$S = \sum_{k=0}^n \frac{2}{5^k} = 2 \left(\frac{1 - (\frac{1}{5})^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} \right) = \frac{5}{2} \left(1 - (\frac{1}{5})^{n+1} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S = \frac{5}{2} \left(1 - (\frac{1}{5})^{n+1} \right) = \frac{5}{2}$$

$$2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{3^k}$$

C'est une somme d'une suite géométrique de raison $q = \frac{5}{3} > 1$ Donc elle est divergente

$$3) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+3}{4+6k}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2k+3}{4+6k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2k}{6k} = \frac{2}{6} \neq 0$$

Cette série est divergente