

Chapitre III.

Dérivées et applications

III.1. Définitions générales

Définition 3.1. (Dérivabilité). Soit $y = f(x)$ une fonction continue et $x_0 \in D_f$. On dit que la fonction $f(x)$ est dérivable au point x_0 si la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ existe.}$$

Cette limite est appelée la dérivée de f au point x_0 . Elle est notée $f'(x_0)$. Ainsi

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Définition 3.2. Soit $f(x)$ une fonction et $I \subset D_f$ un intervalle. Si $f'(x)$ existe pour tout $x \in I$, on dit que f est dérivable sur I . La fonction $f'(x)$ est appelée la dérivée de f (sur I).

Autre notation : la dérivée de $f(x)$ est aussi notée $f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{dy}{dx}$ ou encore f'

Exemples

1. Soit $f(x) = 7$, alors $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7-7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$
2. Soit $f(x) = 5x + 3$, alors
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(x+h) + 3 - (5x + 3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 5 = 5$$
3. Soit $f(x) = x^2$, alors
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$
4. Soit $f(x) = \sqrt{x}$, alors
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

En général, si $f(x) = x^r, r \in \mathbb{R}$, alors $f'(x) = rx^{r-1}$

5. Soit $f(x) = \sin x$, alors
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} 2 \sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right) \cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} 2 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) = \cos x$$
6. Soit $f(x) = \cos x$, alors $f'(x) = -\sin x$
7. Soit $a > 0$, $f(x) = a^x$, alors $f'(x) = a^x \ln a$; si $a = e$, $(e^x)' = e^x$
8. Soit $a > 0$, $f(x) = \log_a x$, alors $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$; si $a = e$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Application : équation de la tangente à un graphe

Soit $f(x)$ une fonction continue et $P(a ; f(a))$ un point du graphe de f . Alors l'équation de la tangente au graphe de f passant par P est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Règles de calculs

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I . Alors

- 1- : $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$
- 2- : $(fg)' = f'g + fg'$
- 3- : Si $g(x) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- 4- : Si $r \in \mathbb{R}$, $(f^r)' = rf'f^{r-1}$

Exemples

- *- $f(x) = 5x^4 - \cos x + \sqrt[3]{x} - \frac{3}{x^2} + 6$, alors $f'(x) = 20x^3 + \sin x + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{6}{x^3}$
- *- $f(x) = \frac{x^5 \ln x}{e^x}$, alors $f'(x) = \frac{(5x^4 \ln x + x^4)e^x - e^x x^5 \ln x}{e^{2x}} = \frac{5x^4 \ln x + x^4 - x^5 \ln x}{e^x}$
- *- $f(x) = \tan x$ alors $f'(x) = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2$
- *- $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + \sqrt{x}}$, alors $f'(x) = \dots$

5- Fonction composée : $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \times g'(x)$

Exemples

- ✓ $f(x) = \sin(x^5)$, alors $f'(x) = 5x^4 \cos(x^5)$ d'où $(\sin u)' = u' \cos u$
- ✓ $f(x) = \cos(x^3)$, alors $f'(x) = -3x^2 \sin(x^3)$ d'où $(\cos u)' = -u' \sin u$
- ✓ $f(x) = 3^{x^5}$, alors $f'(x) = 5x^4 3^{x^5} \ln 3$ d'où pour $a > 0$ on a
 $(a^u)' = -u'a^u \ln a$ et si $a = e$ on a $(e^u)' = u'e^u$
- ✓ $f(x) = \log_5(x^2 + 3)$, alors $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+3)\ln 5}$ d'où pour $a > 0$ on a
 $(\log_a(u))' = \frac{u'}{u \ln a}$ et si $a = e$ on a $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

6- Fonction réciproque (inverse)

Soit f une fonction est bijective et $f^{-1}(y)$ sa fonction réciproque.

On suppose $f'(x) \neq 0$. Par définition de f^{-1} , on a $(f \circ f^{-1})(y) = y$ et en dérivant par rapport à y , on trouve $f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = 1$ ce qui donne

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}$$

En particulier,

$$\begin{aligned} (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} ; (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \\ (\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} ; (\arccos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \\ (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} ; (\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2} \end{aligned}$$

Exemples

- ✓ $f(x) = x^5 \arctan(x^2 + 3)$, alors $f'(x) = 5x^4 \arctan(x^2 + 3) + \frac{2x^6}{1+(x^2+3)^2}$

✓ $f(x) = \frac{e^{x^2 \arccos(x^3)}}{\ln(x^4+1)}$, alors $f'(x) = \dots$

✓ $f(x) = \arcsin(x^2 - 3)$, alors $f'(x) = ?$

7- La fonction $f(x) = (u(x))^{v(x)}$

On pose $f(x) = e^{\ln(u^v)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$ et $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid u(x) > 0\}$

Notons que $(u(x))^{v(x)}$ n'a de sens que si $u(x) > 0$. La dérivée vaut alors

$$f'(x) = \left(v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)} \right) e^{v(x) \ln(u(x))} = \left(v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)} \right) (u(x))^{v(x)}$$

Exemple. Calculons l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f(x) = x^{\sin x}$ au point $P(\pi; 1)$.

On a $D_f = \mathbb{R}_+^*$ et

$$f'(x) = \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) e^{\sin x \ln x} = \left(v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)} \right) x^{\sin x}$$

En $P(\pi; 1)$ on obtient $f'(\pi) = -\ln \pi$. L'équation de la tangente est donc

$$y = -\ln \pi (x - \pi) + 1 = -x \ln \pi + 1 + \pi \ln \pi$$

8- Dérivée des fonctions implicites

Toute relation de la forme $F(x, y) = 0$ définit une fonction implicite $y = y(x)$. On a peut calculer la dérivée de cette fonctions en un point donnée sans trouver explicitement la fonction y .

Exemple 1. Calculons la dérivée de la fonction implicite y définie par la relation suivante:

$$x^4 + y^4 - x^2 y^2 + 5 = 0$$

On dérive par rapport à x :

$$4x^3 + 4y^3 y' - 2xy^2 - 2x^2 y y' = 0 \Rightarrow y'(4y^3 - 2x^2 y) = 2xy^2 - 4x^3$$

$$\text{d'où } y' = \frac{2xy^2 - 4x^3}{4y^3 - 2x^2 y}$$

Exemple 2. Ecrire l'équation de la tangente au graphe de la fonction implicite y définie par la relation suivante au point $P(1,1)$:

$$2x^2 - y^3 + \ln xy - 1 = 0$$

On dérive par rapport à x :

$$4x - 3y^2 y' + \frac{y + xy'}{xy} = 0 \Rightarrow y' \left(\frac{1}{y} - 3y^2 \right) = -4x - \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{-4x - \frac{1}{x}}{\frac{1}{y} - 3y^2}$$

La pente au point P est : $y'(1) = \frac{-4-1}{1-3} = \frac{5}{2}$

D'où l'équation de la tangente est : $y = y'(1)(x - 1) + 1 = \frac{5}{2}(x - 1) + 1$

Dérivées d'ordres supérieurs

Si $f'(x)$ est elle-même dérivable on note :

$$f''(x) = (f'(x))' = \frac{d^2 f}{dx^2} \quad \text{la dérivée seconde ou la dérivée d'ordre 2}$$

$$f^{(3)}(x) = (f''(x))' = \frac{d^3 f}{dx^3} \quad \text{la dérivée d'ordre 3}$$

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' = \frac{d^n f}{dx^n} \quad \text{la dérivée d'ordre } n$$

Si $f^{(n)}$ existe et est continue sur I on note $f \in C^n(I)$ et l'on dit que f est n -fois continument dérivable.

III.2. La règle de Bernoulli-l'Hospital

Théorème. (Règle de Bernoulli- l'Hospital). Soient f, g deux fonctions dérivables sur $I =]a; b[$ telles que pour tout $x \in I$ on ait $g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$. Supposons que

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha$, avec $\alpha = 0$ ou ∞
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Exemples.

$$1- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$$

$$2- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = e^1 = 1$$

$$3- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$4- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x + 6}{2x^2 - 3x + 2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 5}{4x - 3} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$5- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x + 6}{e^x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 5}{e^x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{e^x} = 0$$

$$6- \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

$$7- 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{\pi}{x} \quad ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}$$

$$8- 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^x \quad ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$$

$$9- a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) \quad ; \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 2x)^{1/x}$$

Expressions indéterminées de la forme : ∞^0 ; 1^∞ ; 0^0

On lève l'indétermination de la forme ∞^0 ; 1^∞ ; 0^0 en procédant comme suit :

- On applique la formule : $u^v = e^{\ln(u^v)} = e^{v \ln u}$ pour les transformer en une expression de la forme $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$
- On applique alors la règle de l'Hospital pour calculer la limite

Exemples.

$$1- \infty^0 : \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = e^0 = 1$$

$$2- 1^\infty : \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x^4}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\ln(x^{\frac{1}{1-x^4}})} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{\ln x}{1-x^4}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{-1}{-4x^4}} = e^{\frac{-1}{4}}$$

$$3- 0^0 : \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\sin x)^x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-x^2 \cos x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-x \cos x}{\sin x}} = e^{0/1} = 1$$

$$4- \infty^0 : \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln((e^x + x)^{\frac{1}{x}})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(e^x + x)}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{e^x + 1}{e^x + x}} = e^1 = e$$

$$5- 1^\infty : \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}} = 1$$

III.2. Etude de fonction

Monotonie

Dans toute cette section, $f(x)$ désignera une fonction continue sur son ensemble de définition

Théorème. Soit f une fonction continue sur $I = [a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Alors

- f est croissante $\Leftrightarrow f' \geq 0$ sur $]a; b[$
- f est décroissante $\Leftrightarrow f' \leq 0$ sur $]a; b[$

De plus, si $f' > 0$ ($f' < 0$), alors f est strictement croissante (strictement décroissante).

Exemples

1. Soit $f(x) = 5x + 3$, alors $f'(x) = 5$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
2. Soit $f(x) = x^2 - 6x + 7$, alors $f'(x) = 2x - 6$, on a $f'(x) \geq 0 \Rightarrow 2x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$ donc f est croissante sur $[3, +\infty[$, f est décroissante sur $] -\infty, 3]$

Points critiques

Définition. Soit x_0 un point du domaine de définition de la fonction f

- x_0 est un **point stationnaire** de f si $f'(x_0) = 0$
- x_0 est un **point critique** de f si x_0 est un point stationnaire de f ($f'(x_0) = 0$) ou $f'(x_0)$ n'existe pas

Exemples

- 1- Soit $f(x) = x^2 - 6x + 7$, alors $f'(x) = 2x - 6$, on a $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$, d'où 3 est un point stationnaire de f et donc est un point critique f .
- 2- Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, alors $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$, on a $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, d'où 0 est un point stationnaire de f . D'autre part, $f'(-2)$ et $f'(2)$ n'existent pas. Donc les points critiques de f sont -2, 0 et 2.

Extremum local (relatif)

On dira **extremum** pour maximum ou minimum.

Définition. Soit x_0 est un point critique de f

- x_0 est un maximum local (relatif) de f s'il existe un voisinage de $x_0 : v_\epsilon =]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ tel que $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in v_\epsilon$
- x_0 est un minimum local (relatif) de f s'il existe un voisinage de $x_0 : v_\epsilon =]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ tel que $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in v_\epsilon$

La condition nécessaire et suffisante pour avoir un extremum en x_0 est donnée par le théorème suivant :

Théorème. Soit $f(x)$ une fonction dérivable dans un voisinage de x_0 mais pas nécessairement en x_0 . Alors

x_0 est un extremum $\Leftrightarrow f'(x)$ change de signe en x_0 .

Plus précisément si

- $f'(x) < 0$ pour $x < x_0$ et $f'(x) > 0$ pour $x > x_0$ alors x_0 est un minimum local de f
- $f'(x) > 0$ pour $x < x_0$ et $f'(x) < 0$ pour $x > x_0$ alors x_0 est un maximum local de f

Exemples

- 1- Soit $f(x) = x^2 - 6x + 7$, alors $f'(x) = 2x - 6$: $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$
3 est le seul point critique de f . Comme $f'(x) < 0$ pour $x < 3$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 3$ alors 3 est un minimum local de f
- 2- Soit $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$; 0 est un point critique de f
mais $f'(x) > 0$ pour $x \neq 0$ alors 0 n'est pas un extremum local de f
Un point stationnaire n'est pas nécessairement un extremum
- 3- $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$, alors $f'(x) = 15x^4 - 15x^2$: $f'(x) = 0 \Rightarrow 15x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1$ ou 1 donc les points critiques de f sont $-1, 0$ et 1 .

Tableau de variation

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$f'(-2) = 180$	$f'(-1/2) = -45/16$	$f'(1/2) = -45/16$	$f'(2) = 180$	
f''	+	-	-	+	

Donc f est croissante sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, f est décroissante sur $[-1, 1]$

- -1 est un maximum local de f
 - 0 n'est pas un extremum de f
 - 1 est un maximum local de f
- 4- $f(x) = x^3(x^3 - 1)^{2/3}$

Un cas particulier de ce théorème est le suivant :

Proposition. Soit f une fonction continue et x_0 un point stationnaire ($f'(x_0) = 0$).

- (1) Si $f''(x_0) > 0$, alors x_0 est un minimum local.
- (2) Si $f''(x_0) < 0$ alors x_0 est un maximum local.
- (3) Si $f''(x_0) = 0$ alors x_0 est un plat.

Extremum global (absolu)

Définition. Soit x_0 est un point critique de f

- x_0 est un maximum global (absolu) de f si $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in D_f$
- x_0 est un minimum global (absolu) de f si $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in D_f$

Remarque. Un extremum global n'existe pas toujours sur $\mathbb{R}$.

Exemples

- 1- $f(x) = x^3$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; donc f n'est pas de extremum global
- 2- $f(x) = x^2 - 6x + 7$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; donc f a un minimum global mais n'a pas de maximum global

3- $f(x) = \frac{3x^2+7}{x^2+2}$, on a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 3$; donc f a un minimum et un maximum global

Extremum global sur $I = [a; b]$

Pour déterminer les extremums globaux sur un intervalle fermé $I = [a; b]$:

- Déterminer les points critiques de f dans l'intervalle fermé $I : x_1, x_2, \dots$
- Calculer les images des points critiques: $f(x_1), f(x_2), \dots$
- Calculer $f(a)$ et $f(b)$,
- Comparer les images

Exemple

Déterminer les extremums globaux de f dans l'intervalle $[-1/2; 2] : f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$.

On a $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 : f'(x) = 0 \Rightarrow 15x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1$ ou 1

D'où les points critiques de f dans l'intervalle $[-1/2; 2]$ sont 0 et 1 .

$$f(0) = 1; f(1) = -1; f(1/2) = 15/32 \text{ et } f(2) = 57$$

Donc le maximum global est le point $(2, 57)$ et le minimum global est $(1, -1)$.

Courbure et point d'inflexion

Définition. Soit $f \in C^2(I)$, 2-fois continûment dérivable.

- f est dite **convexe** sur I si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$
- f est dite **concave** sur I si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$
- $x_0 \in D_f$ est un **point d'inflexion** de f si $f''(x)$ change de signe en x_0 .

Exemples

1- Soit $f(x) = x^2 - 6x + 7$, alors $f'(x) = 2x - 6 \Rightarrow f''(x) = 2 > 0$.

Comme $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors f est convexe sur $\mathbb{R}$

2- Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$, alors $f'(x) = 3x^2 - 12x \Rightarrow f''(x) = 6x - 12$, on a

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Comme $f''(x) < 0$ pour $x < 2$ alors f est concave sur $]-\infty, 2[$ [et $f''(x) > 0$ pour $x > 2$ alors f est convexe sur $]2, +\infty[$ et donc 2 est un point d'inflexion f .

3- Soit $f(x) = x^4 - 5x + 1$, alors $f'(x) = 4x^3 - 5 \Rightarrow f''(x) = 12x^2$,

on a $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, mais 0 n'est pas un point d'inflexion de f car $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

III.4. Développement limité

Théorème (Approximation d'ordre n).

Soit f une fonction n -fois continûment dérivable sur I , $f(x) \in C^n(I)$, et $a \in I$ un point intérieur de I . Alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

Avec $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$

*- Le polynôme

$$T_n^f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

est appelé le **développement limité d'ordre n de $f(x)$ au point a** .

*- La fonction $R_n(x)$ est le **reste**

Exemple 1.

$f(x) = \cos x$. Le développement limité d'ordre 4 de $f(x)$ au point 0 est

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + R_4(x) \\ &= 1 + 0 \cdot x + \frac{-1}{2}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + R_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + R_4(x) \end{aligned}$$

Exemple 2.

$f(x) = e^{2x}$. Le développement limité d'ordre 4 de $f(x)$ au point 0 est

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + R_4(x) \\ &= 1 + 2 \cdot x + \frac{4}{2}x^2 + \frac{8}{3!}x^3 + \frac{16}{4!}x^4 + R_4(x) \\ &= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + R_4(x) \end{aligned}$$

Série de Taylor

Si f une fonction continûment dérivable d'ordre infini ($f \in C^\infty(I)$) et si $R_n(x) \longrightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$ pour tout $x \in I$, on obtient la série de Taylor en a qui converge vers $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Exemple 3.

$f(x) = e^x$. On a $f(0) = 1$; $f'(0) = 1$; $f''(0) = 1$; $f^{(3)}(0) = 1$; ...; $f^{(k)}(0) = 1$

Le développement limité d'ordre n de $f(x)$ au point 0 est

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x)$$

Donc la serie de Taylor de f est

$$f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

Exemple 4.

$f(x) = \sin x$. On a $f(0) = 0$; $f'(0) = 1$; $f''(0) = 0$; $f^{(3)}(0) = -1$; $f^{(4)}(0) = 0$; $f^{(5)}(0) = 1$

Le développement limité d'ordre n de $f(x)$ au point 0 est

$$f(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + R_7(x)$$

Donc la série de Taylor de f est

$$f(x) = \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Exemple 5.

De même, la série de Taylor de $f(x) = \cos x$ est

$$f(x) = \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

TD N°3 : Dérivées et applications

Exercice 1. Calculer, lorsqu'elles existent, les dérivées des fonctions suivantes :

$$1) y = 2\sqrt[5]{x^2} - \sqrt[3]{x^5 + 3} - \frac{3}{x^2}; \quad 2) y = \ln(3 + \sin 5x); \quad 3) y = \sin(e^{x^2}); \quad 4) y = 3^{\tan 5x}$$

$$5) y = \ln(\ln x); \quad 6) y = (x^2 + \cos 2x)^5 \sin(e^{-3x} + 5x); \quad 7) y = \arcsin(4 - x^2);$$

$$8) y = \arctan \sqrt{x}; \quad 9) y = \frac{e^{\sqrt{x}} \cos(x^3)}{\cos 3x}; \quad 10) y = \frac{\arccos(1 - e^{-x})}{\ln \sqrt{1 + x^2}}; \quad 11) y = (x^2 + 1)^{\sin x}$$

Exercice 2. Etudier la continuité et la dérivabilité pour les fonctions suivantes :

$$1) f(x) = |x - 1|; \quad 2) f(x) = x|x|$$

$$3) f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}; \quad 4) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 3. Montrer que :

- 1) La fonction $y = e^x \sin x$ vérifie la relation: $y'' - 2y' + 2y = 0$
- 2) La fonction $y = e^{-x} \sin 2x$ vérifie la relation: $y'' + 2y' + 5y = 0$

Exercice 4. Calculer les dérivées des fonctions implicites y suivantes:

$$1) x^4 + y^4 = x^2 y^2; \quad 2) x^3 + y^3 + x^2 y^2 - e^{xy} = 0; \quad 3) 2y \ln y = x; \quad 4) y = 1 + x e^y$$

Exercice 5. Ecrire l'équation de la tangente à chacune des courbes au point indiqué :

$$1) y = \arctan 2x \text{ . } M(0,0); \quad 2) y = \cos 2x - \ln(1 + \sin x) \text{ . } M(\pi, 1);$$

$$3) x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0 \text{ . } M(-1,3)$$

Exercice 6. Calculer, à l'aide de la règle de L'Hôpital, les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{x - \pi}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x^2 + 1)); \quad 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1);$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/x}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}; \quad 9) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \frac{2}{x})^{x^2}; \quad 10) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}); \quad 11) \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{\cos 3x}{x^2})$$

Exercice 7. Trouver les intervalles de monotonie, les intervalles de convexité et de concavité, les extrémums locaux des fonctions suivantes:

$$1) y = 3x^4 - 4x^3; \quad 2) y = x^2 e^{-x}; \quad 3) y = 3x^{5/3} - 15x^{2/3}$$

Exercice 8. Trouver les minimums et maximums absolus des fonctions suivantes:

$$1) y = -3x^4 + 6x^2 - 1 \text{ sur } [-2, 2]; \quad 2) y = 2x^3 - 15x^2 + 36x \text{ sur } [1, 5]$$

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^5 - 5x + 1$. Etudier les variations de f et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

Exercice 10. Donner le développement limité d'ordre 5 de f au point 0 et déduire la série de Taylor de f en 0.

$$1) f(x) = e^{-3x}; \quad 2) f(x) = \sin 2x; \quad 3) f(x) = \ln(x + 1); \quad 4) f(x) = \frac{1}{x + 1}$$