

Corrigé de l'examen Algèbre

Exercice 1

A. Ecrire la table de vérité des assertions suivantes en considérant uniquement les valeurs des variables données.

i) $P \wedge (P \vee Q)$ Si Q est vrai, ii) $P \vee (Q \Rightarrow R)$ Si Q est faux

B. Donner la négation mathématique des phrases suivantes:

- 1) Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges
- 2) Certains nombres entiers sont pairs
- 3) Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.

C. Soit $x_0 \in R$ et f une application de R dans R . Donner la négation et la contraposée de la phrase logique suivante

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in R, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Corrigé:

A.

i) $P \wedge (P \vee Q)$

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge (P \vee Q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

ii) $P \vee (Q \Rightarrow R)$

P	Q	R	$Q \Rightarrow R$	$P \vee (Q \Rightarrow R)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V
F	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	F	F	V	V

B.

1) Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges

négation : il existe au moins une boules qui n'est pas rouge

2) Certains nombres entiers sont pairs

négation : Tous les nombres entiers ne sont pas pairs

3) Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.

négation : il existe un entier est divisible par 4 qui ne se termine pas par 4

C.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

• *Négation :*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in \mathbb{R}, (|x - x_0| < \alpha) \wedge (|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)$$

• *Contraposée*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon) \Rightarrow (|x - x_0| \geq \alpha)$$

Exercice 2

Soit les deux nombres réels $a = 2244$ et $b = 1089$

1. Calculer $PGCD(a, b)$ par l'algorithme d'Euclide
2. Déterminer l'identité de Bézout correspondante
3. Calculer $PPCM(a, b)$
4. Donner la décomposition en facteurs premiers de a et b
5. En déduire la décomposition en facteurs premiers de $PGCD(a, b)$ et $PPCM(a, b)$, et retrouver les résultats des questions 1 et 3.

Corrigé:

1.

$$2244 = 1089 \times 2 + 66$$

$$1089 = 66 \times 16 + 33$$

$$66 = 33 \times 2 + 0$$

$$PGCD(a, b) = 33$$

2.

$$33 = 1089 - 66 \times 16$$

$$33 = 1089 - (2244 - 1089 \times 2)16$$

$$33 = 1089 - 2244 \times 16 + 1089 \times 32$$

$$33 = -2244 \times 16 + 1089 \times 33$$

$$33 = 2244(-16) + 1089(33)$$

$$33 = a(-16) + b(33)$$

3.

$$\text{on a : } PGCD(a, b) = 33 \text{ et } a = 2244 \quad b = 1089$$

$$PPCM(a, b) = \frac{ab}{PGCD(a, b)} = \frac{2244 \times 1089}{33} = 74052$$

$$PPCM(a, b) = 74052$$

4.

$$\begin{array}{r|l} 2244 & 2 \\ 1122 & 2 \\ 561 & 3 \\ 187 & 17 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$2244 = 2^2 \times 3 \times 11 \times 17$$

1089	3
363	3
121	11
11	11
1	

$$1089 = 3^2 \times 11^2$$

5.

PPCM Les facteurs avec les plus grandes exposants

$$PPCM(a, b) = 2^2 \times 3^2 \times 11^2 \times 17$$

PGCD Les facteurs commun avec les plus petits exposants

$$PGCD(a, b) = 3 \times 11$$

Exercice 3

On définit sur R la relation R définie par: $xRy \Leftrightarrow \cos^2(x) + \sin^2(y) = 1$ montrer que R est une relation d'équivalence

Corrigé:

$$\text{on a : } xRy \Leftrightarrow \cos^2(x) + \sin^2(y) = 1$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(y) = 1 \quad \text{or } \sin^2(y) = 1 - \cos^2(y)$$

$$\cos^2(x) + (1 - \cos^2(y)) = 1$$

$$\cos^2(x) + 1 - \cos^2(y) = 1$$

$$\cos^2(x) - \cos^2(y) = 0$$

$$\cos^2(x) = \cos^2(y)$$

$$xRy \Leftrightarrow \cos^2(x) = \cos^2(y)$$

• *Réflexive: $\forall x \in R, xRx$*

$$\cos^2(x) = \cos^2(x) \Rightarrow xRx$$

$\Rightarrow R$ est Réflexive

• *Symétrique: $\forall x, y \in R, \text{ Si } xRy \Rightarrow yRx$*

$$\text{on a : } xRy \Leftrightarrow \cos^2(x) = \cos^2(y)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(y) = \cos^2(x)$$

$$\Rightarrow yRx$$

$\Rightarrow R$ est Symétrique

• *Transitive: $\forall x, y, z \in R, \text{ Si } (xRy \text{ et } yRz) \Rightarrow xRz$*

$$xRy \Leftrightarrow \cos^2(x) = \cos^2(y)$$

$$yRz \Leftrightarrow \cos^2(y) = \cos^2(z)$$

$$\text{on a : } \cos^2(x) = \cos^2(y) \text{ et } \cos^2(y) = \cos^2(z)$$

$$\text{Donc } \cos^2(x) = \cos^2(z) \Rightarrow xRz$$

$\Rightarrow R$ est Transitive

Donc R est une relation d'équivalence

Exercice 4

Sur l'ensemble Z , étudier les propriétés de la loi définie par: $p * q = p + q + pq$

1. Montrer que $*$ est une loi de composition interne commutative et associative
2. Montrer que $*$ possède un élément neutre.
3. Quels sont les éléments symétrisables?
4. Quels sont les éléments réguliers ?
5. Est-ce que $(Z, *)$ est un groupe?

Corrigé:

1.

- *interne*

La loi $*$ est interne si $p, q \in Z, p * q \in Z$

$$p * q = p + q + pq$$

$$pq \in Z, p + q \in Z, p \in Z, q \in Z$$

Donc $p * q \in Z$ alors La loi $*$ est interne

- *commutative: $\forall (p, q) \in Z; p * q = q * p$*

$$\text{on a: } p * q = p + q + pq = q + p + qp = q * p$$

Donc La loi $*$ est commutative

- *associative: $\forall (p, q, r) \in Z; (p * q) * r = p * (q * r)$*

$$(p * q) * r = (p + q + pq) * r = p + q + pq + r + (p + q + pq)r \\ = p + q + pq + r + pr + qr + pqr$$

$$p * (q * r) = p * (q + r + qr) = p + q + r + qr + p(q + r + qr) \\ = p + q + r + qr + pq + pr + pqr$$

Donc La loi $*$ est associative

2.

on cherche un élément $e \in Z$ tel que $p \in Z$

$$p * e = e * p = p \Leftrightarrow e(1 + p) = 0$$

on trouve donc un élément : $e = 0$

3.

Soit un entier $p \in Z$. Est-ce que l'élément p possède un symétrique?

On cherche un élément $q \in Z$ tel que $p * q = q * p = 0$, c'est-à-dire :

$$p + q + pq = 0 \Leftrightarrow q(1 + p) = -p \Leftrightarrow (1 + p)(1 + q) = 1$$

Les seuls éléments inversibles sont 0 et -2 qui sont les propres inverses

4.

On suppose que $p * q = q * r$ soit $(1 + p)(1 + q) = (1 + p)(1 + r)$

on voit ainsi que tous les éléments sont réguliers, sauf $p = -1$

5.

No