

Corrigé TD-2 Limites et continuité

Exercice 1.

Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 1)$; 2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^6 + 5} - x^3)$; 3) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 2x - 5}}{x^2 - 3x - 7}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(12x^3 - 1) - \ln(3x^3 + 7x^2 + 10)]$
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x - 1) - \ln(5x^3 + 7x^2 + 10) + 2\ln x]$ 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1}$ 8) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$ 9) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x}$ 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos(3x)\sin(3x)\cos(6x)}{x^2}$

Corrigé:

- 1)
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - (x+1)^2}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2 - 2x - 1}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x})} = \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2}$$
 - $$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 1) = +\infty - (-\infty) = +\infty$$
- 2)
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^6 + 5} - x^3) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^6 + 5 - x^6}{\sqrt{x^6 + 5} - x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{\sqrt{x^6 + 5} - x^3} = 0$$
 - $$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^6 + 5} - x^3) = +\infty - (-\infty) = +\infty$$
- 3)
- $$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 2x - 5}}{x^2 - 3x - 7} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}}}{x^2 (1 - \frac{3}{x} - \frac{7}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}}}{(1 - \frac{3}{x} - \frac{7}{x^2})} = 1$$
- 4)
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(12x^3 - 1) - \ln(3x^3 + 7x^2 + 10)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(\frac{12x^3 - 1}{3x^3 + 7x^2 + 10})]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(\frac{12 - \frac{1}{x^3}}{3 + \frac{7}{x} + \frac{10}{x^3}})] = \ln(\frac{12}{3}) = \ln(4)$$
- 5)
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x - 1) - \ln(5x^3 + 7x^2 + 10) + 2\ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(\frac{x-1}{5x^3 + 7x^2 + 10}) + 2\ln x]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(\frac{x-1}{5x^3+7x^2+10}\right) + \ln x^2 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(\frac{(x-1)x^2}{5x^3+7x^2+10}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(\frac{x^3-x^2}{5x^3+7x^2+10}\right) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{5+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^3}}\right) \right] = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$$

6)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{2}$$

7)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} = \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x+1) = 3$$

8)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \quad \text{on pose } \frac{1}{x} = t \quad x \rightarrow 0^+ \Rightarrow t \rightarrow +\infty$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(t)}{t} = 0$$

9)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x} = e^{\sin 0} = e^0 = 1$$

10)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} = \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} \quad \text{on pose } 3x = t \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3 \sin t}{t} = 3$$

11)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(3x) \sin(3x) \cos(6x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos(3x) \times \frac{\sin(3x)}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(6x)}{x}$$

$$= 2 \times 3 \times 6 = 36$$

Exercice 2.

Etudier la continuité des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3} & x \neq 3 \\ 2 & x = 3 \end{cases}$$

$$u(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si } x = 1 \end{cases}; \quad v(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Corrigé:

- $f(x)$

$$= x^2 + \frac{|x|}{x} \quad x \neq 0$$

$$= 1 \quad x = 0$$

$$|x| = x \text{ si } x > 0 \quad \text{ou} \quad -x \text{ si } x < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 1 = 1$$

comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ donc $f(x)$ n'existe pas

Donc $f(x)$ n'est pas continue en $x = 0$

- $g(x)$

$$= \frac{|x-3|}{x-3} \quad x \neq 3$$

$$= 2 \quad x = 3$$

$$\frac{|x-3|}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} \text{ si } x > 3 \quad \text{ou} \quad \frac{-(x-3)}{x-3} \text{ si } x < 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x-3)}{x-3} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{x-3} = 1$$

comme $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x)$ donc $g(x)$ n'existe pas

Donc $g(x)$ n'est pas continue en $x = 3$

- $u(x)$

$$= \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} \quad \text{si } x \neq 1$$

$$= \frac{3}{4} \quad \text{si } x = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} u(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+2-4}{(x-1)(\sqrt{x^2+x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)(\sqrt{x^2+x+2}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)}{\sqrt{x^2+x+2}+2} = \frac{(1+2)}{\sqrt{4+2}+2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} u(x) = u(1)$$

Donc $u(x)$ est continue en $x = 1$ d'où $u(n)$ est continue dans $\mathbb{R}$

- $v(x)$

$$= x^2 \sin \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0$$

$$= 0 \quad \text{si } x = 0$$

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

$$-x^2 \leq v(x) \leq x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 \leq \lim_{x \rightarrow 0} v(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} v(x) \leq 0$$

d'après théorème de gendarme $\lim_{x \rightarrow 0} v(x) = 0 = v(0)$

Donc $v(x)$ est continue en $x = 1$ d'où $v(n)$ est continue dans $\mathbb{R}$

Exercice 3.

Pour quelle valeur de α la fonction f , définie ci-après, est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

$$1) f(x) = \frac{x^3-8}{x-2} \text{ si } x \neq 2, \alpha \text{ si } x = 2;$$

$$2) f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x} \text{ si } x > 4, (x + \alpha)^2 \text{ si } x \leq 4$$

Corrigé:

1.

$$f(x) = \frac{x^3-8}{x-2} \text{ si } x \neq 2, \alpha \text{ si } x = 2$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ SSi $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = \alpha$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x + 4 = 8$$

$\Rightarrow f$ est continue sur $\mathbb{R}$ SSi $\alpha = 8$

2.

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x} \text{ si } x > 4, (x + \alpha)^2 \text{ si } x \leq 4$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ SSi $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) = (x + \alpha)^2$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{x} - \frac{1}{x} = \frac{7}{4}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (x + \alpha)^2 = (4 + \alpha)^2$$

$$\bullet f(4) = (4 + \alpha)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \Leftrightarrow \frac{7}{4} = (4 + \alpha)^2$$

$$\Rightarrow \frac{7}{4} = (4 + \alpha)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{7}}{4} = (4 + \alpha) \Rightarrow (4 + \alpha) = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ ou } (4 + \alpha) = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4} - 4 \text{ ou } \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4} - 4$$

$$\Rightarrow f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ SSi } \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4} - 4 \text{ ou } \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4} - 4$$

Exercice 4.

Peut-on prolonger les fonctions suivantes par continuité aux points proposés? Si oui, donner l'expression du prolongement.

$$f(x) = \frac{\sin 5x}{x} \text{ en } x = 0; \quad g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} \text{ en } x = 2; \quad h(x) = \frac{(\sin \pi x)^2}{x^2} \text{ en } x = 0$$

Corrigé:

- $f(x) = \frac{\sin 5x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe donc on peut prolonger $f(x)$ par continuité en $x = 0$

on note $\bar{f}(x) = \frac{\sin 5x}{x}$ si $x \neq 0$, 5 si $x = 0$

- $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ existe donc on peut prolonger $g(x)$ par continuité en $x = 2$

on note $\bar{g}(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ si $x \neq 2$, 1 si $x = 2$

- $h(x) = \frac{(\sin \pi x)^2}{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin \pi x)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \pi x}{x} \right)^2 = \pi^2$$

$\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ existe donc on peut prolonger $h(x)$ par continuité en $x = 0$

on note $\bar{h}(x) = \frac{(\sin \pi x)^2}{x^2}$ si $x \neq 0$, π^2 si $x = 0$

Exercice 5.

On définit f par $f(x) = \frac{\sin \sqrt{x^2}}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$, l'application a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?

Corrigé:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$$

f est continue à droite de 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin \sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1 \neq f(0)$$

f n'est pas continue à gauche de 0

f n'admet pas limite en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0^-} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+}$