

Corrigé de l'examen Analyse

Exercice 1.

Calculer, les limites suivantes:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+6n^4 - \sqrt{36n^8 + 5n^4 + 2}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{5x^2+4} - \sqrt{2x^2+7}}{x^3 - x^2 + x - 1} \right)$$

Corrigé:

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+6n^4 - \sqrt{36n^8 + 5n^4 + 2}} \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+6n^4 - \sqrt{36n^8 + 5n^4 + 2}} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1(1+6n^4 + \sqrt{36n^8 + 5n^4 + 2})}{(1+6n^4 - \sqrt{36n^8 + 5n^4 + 2})(1+6n^4 + \sqrt{36n^8 + 5n^4 + 2})} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+6n^4 + \sqrt{36n^8 + 5n^4 + 2}}{1+12n^4 + 36n^8 - 36n^8 - 5n^4 - 2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+6n^4 + \sqrt{36n^8 + 5n^4 + 2}}{7n^4 - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 \left(\frac{1}{n^4} + 6 + \sqrt{36 + \frac{5}{n^4} + \frac{2}{n^8}} \right)}{n^4 \left(7 - \frac{1}{n^4} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^4} + 6 + \sqrt{36 + \frac{5}{n^4} + \frac{2}{n^8}}}{7 - \frac{1}{n^4}} = \frac{12}{7} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+6n^4 - \sqrt{36n^8 + 5n^4 + 2}} \right) = \frac{12}{7}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{5x^2+4} - \sqrt{2x^2+7}}{x^3 - x^2 + x - 1} \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{5x^2+4} - \sqrt{2x^2+7}}{x^3 - x^2 + x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x^2+4} - \sqrt{2x^2+7}}{(x^2+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{5x^2+4} - \sqrt{2x^2+7})(\sqrt{5x^2+4} + \sqrt{2x^2+7})}{(x^2+1)(x-1)(\sqrt{5x^2+4} + \sqrt{2x^2+7})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2+4-2x^2-7}{(x^2+1)(x-1)(\sqrt{5x^2+4} + \sqrt{2x^2+7})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-3}{(x^2+1)(x-1)(\sqrt{5x^2+4} + \sqrt{2x^2+7})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x+1)}{(x^2+1)(x-1)(\sqrt{5x^2+4} + \sqrt{2x^2+7})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x+1)}{(x^2+1)(\sqrt{5x^2+4} + \sqrt{2x^2+7})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x+1)}{(x^2+1)(\sqrt{5x^2+4} + \sqrt{2x^2+7})} = \frac{3 \times 2}{2(3+3)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{5x^2+4} - \sqrt{2x^2+7}}{x^3 - x^2 + x - 1} \right) = \frac{1}{2}$$

Exercice 2.

1) Calculer, lorsqu'elles existent, les dérivées des fonctions suivantes:

$$\text{a) } y = 2x^8 + \sqrt[5]{x} + \frac{3}{x^4} + \arctan 6x \quad \text{b) } y = x^5 \sin(e^{x^2} + 1) \quad \text{c) } y = (3x^4 + 2)^{\cos x}$$

2) Calculer, à l'aide de la règle de l'Hospital, les limites suivantes:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 5x)} \right)$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2x}$

Corrigé:

1)

a) $y = 2x^8 + \sqrt[5]{x} + \frac{3}{x^4} + \arctan 6x$ Derive a retenir :

$$y' = 16x^7 + \frac{x^{-\frac{4}{5}}}{5} - \frac{12}{x^5} + \frac{6}{1 + (6x)^2}$$

b) $y = x^5 \sin(e^{x^2} + 1)$

$$y' = 5x^4 \sin(e^{x^2} + 1) + x^5 \times \cos(e^{x^2} + 1) \times 2x \times e^{x^2}$$

c) $y = (3x^4 + 2)^{\cos x}$

Formule: $f(x) = u(x)^{v(x)} \Rightarrow f'(x) = [v'(x) \ln(u(x)) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)}]u(x)^{v(x)}$

$$y = e^{\ln((3x^4 + 2)^{\cos x})} = e^{\cos x \ln(3x^4 + 2)}$$

$$y' = (-\sin x \ln(3x^4 + 2) + \frac{12x^3 \cos x}{3x^4 + 2})(3x^4 + 2)^{\cos x}$$

Démonstration :

$$y = (3x^4 + 2)^{\cos x}$$

$y > 0$ donc $\ln(y)$ est défini

$$\ln(y) = \ln((3x^4 + 2)^{\cos x})$$

$$\ln(y)' = (\cos x \ln(3x^4 + 2))'$$

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \ln(3x^4 + 2) + \frac{12x^3}{3x^4 + 2} \cos x \Rightarrow y' = y(-\sin x \ln(3x^4 + 2) + \frac{12x^3 \cos x}{3x^4 + 2})$$

2) Énoncé de règle de l'hospital :

Théorème de L'Hospital

On note a un nombre réel, f et g deux fonctions dérivables dans un intervalle ouvert

contenant a et telles que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ou si $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$

alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Cette règle s'applique également aux calculs de limites lorsque x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 5x)} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 5x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-3\sin 3x}{\cos 3x}}{\frac{-5\sin 5x}{\cos 5x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\tan 3x}{5\tan 5x}$$

or $\tan x \sim x$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(3x)}{5(5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x}{25x} = \frac{9}{25}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 5x)} \right) = \frac{9}{25}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

On calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ on pose $u = \frac{1}{x}$ $x \rightarrow +\infty, u \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+u}}{1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2x} = e^2$$

Exercice 3.

Soit $f(x) = e^{-3x}$, Donner le développement limité d'ordre 3 de f au point 0

Corrigé:

$$f(x) = e^{-3x}$$

• le développement limité d'ordre 4 de f au point 0

$$f'(x) = -3e^{-3x}, \quad f''(x) = 9e^{-3x}, \quad f^{(3)}(x) = -27e^{-3x}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f''(0)}{2}(x - 0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x - 0)^3$$

$$f(x) = 1 - 3x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)$$

le terme $o(x^3)$ représente les termes de degré strictement supérieur à 3 ($x^4, x^5, x^6, \dots$ etc) mais on ne détaille pas ces termes

Exercice 4 :

$$\text{Soit } f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1$$

a) Déterminer les intervalles de monotonie de f

b) Trouver les extrémums locaux de la fonction f

c) Trouver les extrémums globaux de la fonction f dans l'intervalle $[-2, 1]$

d) Etudier la convexité et la concavité de f et déterminer les points d'inflexions de f .

Corrigé:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1$$

a)

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x = 4x(x^2 - 3x - 4) = 4x(x - 4)(x + 1)$$

$$4x(x - 4)(x + 1) = 0$$

$$4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	

$$f(-1) = -2 \quad f(4) = -127 \quad f(0) = 1$$

f est croissante sur $[-1; 0]$ et $[4; +\infty[$

f est décroissante sur $] -\infty; -1]$ et $[0; 4]$

b)

f admet des extrémums locaux lorsque $f'(x) = 0$

-1 est un minimum local de f

0 est un maximum local de f

4 est un minimum local de f

c)

$$f(-1) = (-1)^4 - 4(-1)^3 - 8(-1)^2 + 1 = -2$$

$$f(0) = (0)^4 - 4(0)^3 - 8(0)^2 + 1 = 1$$

$$f(-2) = (-2)^4 - 4(-2)^3 - 8(-2)^2 + 1 = 17$$

$$f(1) = (1)^4 - 4(1)^3 - 8(1)^2 + 1 = -10$$

Donc :

-2 est un maximum global sur $[-2, 1]$

1 est un minimum global sur $[-2, 1]$

d)

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x - 16$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 24x - 16 = 3x^2 - 6x - 4 = 0$$

$$\Delta = 84$$

$$\text{Pts critique } 1 + \frac{\sqrt{21}}{3}, 1 - \frac{\sqrt{21}}{3}$$

x	$-\infty$	$1 - \frac{\sqrt{21}}{3}$	$1 + \frac{\sqrt{21}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	-	+	

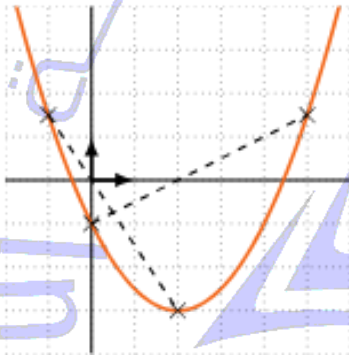
f est concave sur $]1 - \frac{\sqrt{21}}{3} ; 1 + \frac{\sqrt{21}}{3}]$,

f est convexe sur $] -\infty ; 1 - \frac{\sqrt{21}}{3} [\cup] 1 + \frac{\sqrt{21}}{3} ; +\infty [$

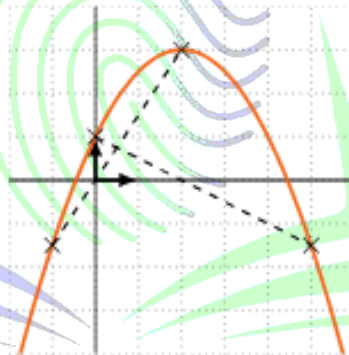
$1 - \frac{\sqrt{21}}{3}$ et $1 + \frac{\sqrt{21}}{3}$ sont des point d'inflexion de f

Exemple :

Fonction convexe



Fonction concave



SUPNUM

Institut Supérieur du Numérique