



Condensateurs et inducteurs

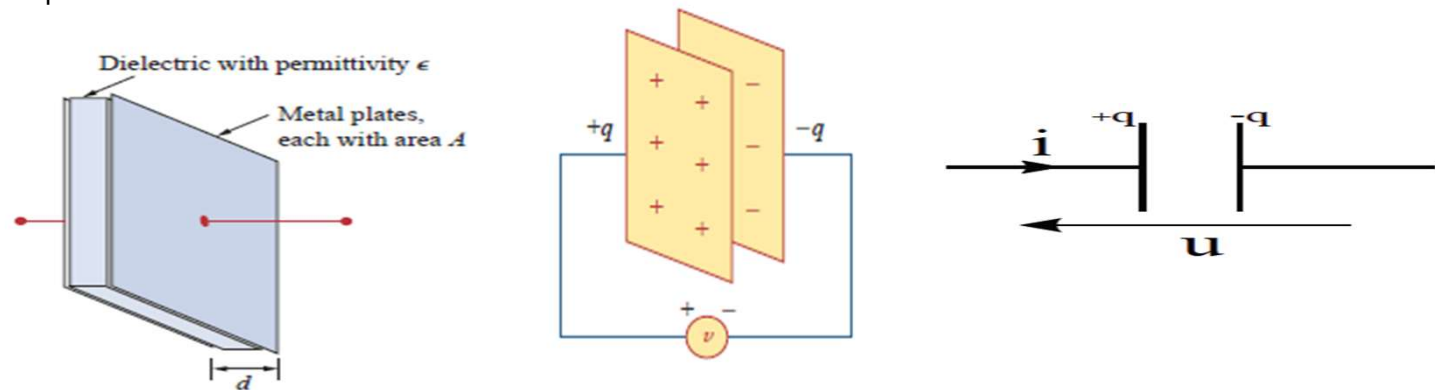


Le condensateur

- ❑ Un condensateur est un élément passif de circuit prévu pour stocker de l'énergie électrique.
- ❑ Avec les résistances, les condensateurs sont les éléments les plus utilisés dans les schémas pratiques.
- ❑ Les condensateurs sont largement utilisés dans l'électronique, les communications, les ordinateurs et les systèmes d'alimentation.
- ❑ Par exemple, ils sont utilisés comme éléments de mémoire dynamique dans les systèmes informatiques.

Le condensateur

- Un condensateur est constitué de deux armatures conductrices séparées par un isolant appelé diélectrique.



- Les condensateurs sont caractérisés par leur **capacité C** qui s'exprime en **Farad**. C'est la capacité qu'ils ont à accumuler des charges lorsqu'ils sont soumis à une certaine différence de potentiel.

Le condensateur



Le condensateur

Relation tension-intensité

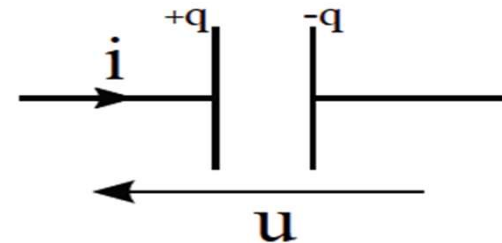
- On connaît la relation entre la charge portée par l'armature positive et la tension appliquée aux bornes du condensateur :

$$q = C \cdot u$$

- On connaît la relation entre l'intensité du courant arrivant sur le condensateur et la variation de charge de l'armature positive : $i = \frac{dq}{dt}$

D'où :

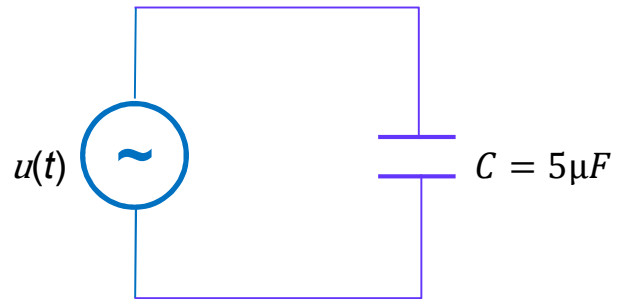
$$i = C \frac{du}{dt}$$



Le condensateur

Relation tension-intensité

□ Exemple :



$$u(t) = 10 \cos 6000t$$

Calculer le courant i traversant le condensateur

Par définition : $i = C \frac{du}{dt}$

$$i = C \frac{du}{dt} = 5 \times 10^{-6} \frac{d}{dt} (10 \cos(6000t))$$

$$= -5 \times 10^{-6} \times 6000 \times 10 \sin(6000t)$$

$$= -0,3 \sin(6000t) A$$

Le condensateur

Relation tension-intensité

- De par l'équation précédente, il résulte que si la tension aux bornes du condensateur ne change pas avec le temps, le courant traversant le condensateur est nul.

$$i = C \frac{du}{dt} = 0$$

→ Le condensateur se comporte comme un circuit-ouvert

- Toutefois, si une batterie (tension continue) est reliée aux bornes d'un condensateur, celui-ci se charge.

Le condensateur

Énergie emmagasinée par le condensateur

- L'énergie emmagasinée par le condensateur entre le temps $t = 0$ où $u = 0$ et le temps t où $u = u$ est donnée par :

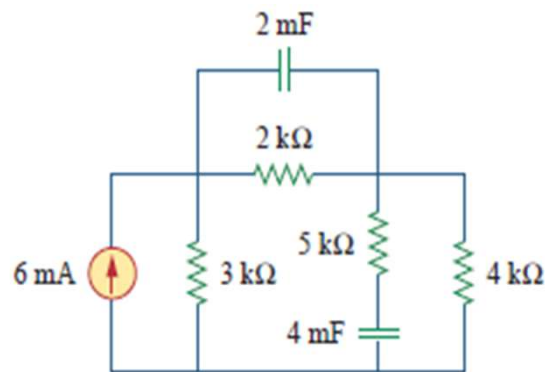
$$E_c = \frac{1}{2} C u^2$$

- Si l'énergie E_c augmente, la puissance reçue ($P = u(t) i(t)$) est positive est le condensateur se comporte comme un **récepteur**.
- Si l'énergie E_c diminue, la puissance reçue est négative est le condensateur se comporte comme un **générateur**.

Le condensateur

Énergie emmagasinée par le condensateur

□ Exemple :



Calculer l'énergie stockée dans chacun des condensateurs

Sous les conditions DC, le condensateur se comporte comme interrupteur ouvert.

Le courant i est obtenu par (diviseur de courant)

$$i = \frac{3}{3 + 2 + 4} \times (6mA) = 2mA$$

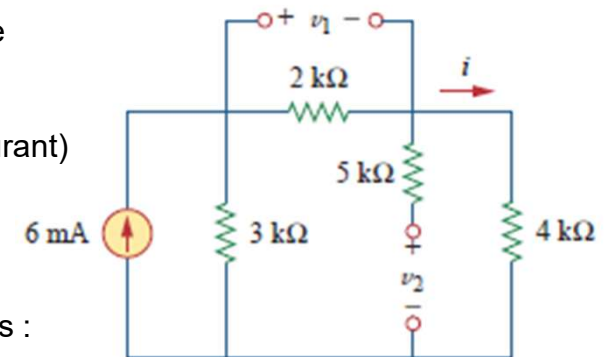
les tensions aux bornes des condensateurs :

$$v_1 = 2000i = 4V \text{ et } v_2 = 4000i = 8V$$

Donc les énergies stockées dans les des condensateurs :

$$E_{C_1} = \frac{1}{2} C_1 v_1 = \frac{1}{2} (2 \times 10^{-3})(4)^2 = 16 mJ$$

$$E_{C_2} = \frac{1}{2} C_2 v_2 = \frac{1}{2} (4 \times 10^{-3})(8)^2 = 128 mJ$$



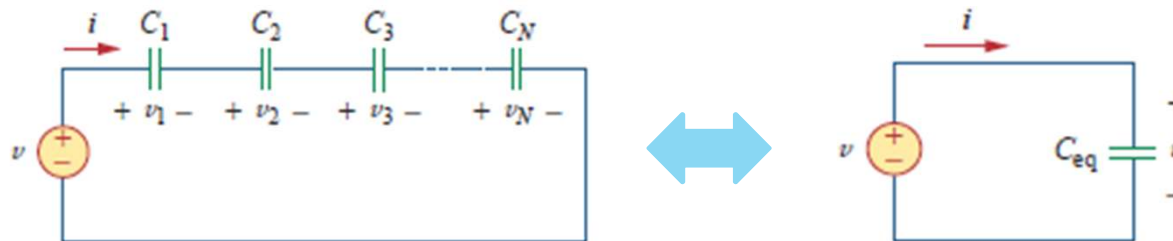
Le condensateur

Association des condensateurs

□ Association en série :

- ✓ N condensateurs de capacité $C_1, C_2, \dots, C_N$ placés en série sont équivalents à un condensateur de capacité C_{eq} vérifiant la relation suivante :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}$$



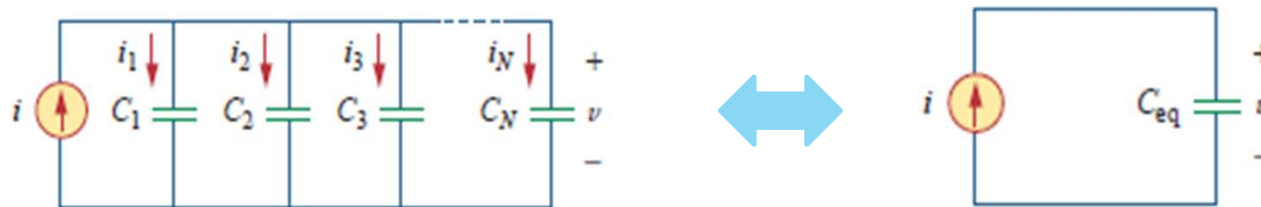
Le condensateur

Association des condensateurs

□ Association en parallèle :

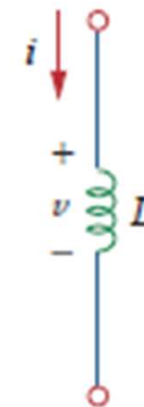
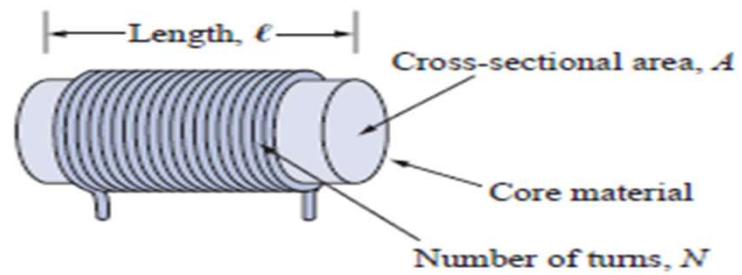
- ✓ N condensateurs de capacité $C_1, C_2, \dots, C_N$ placés en parallèle sont équivalents à un condensateur de capacité C_{eq} vérifiant la relation suivante :

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots C_N$$

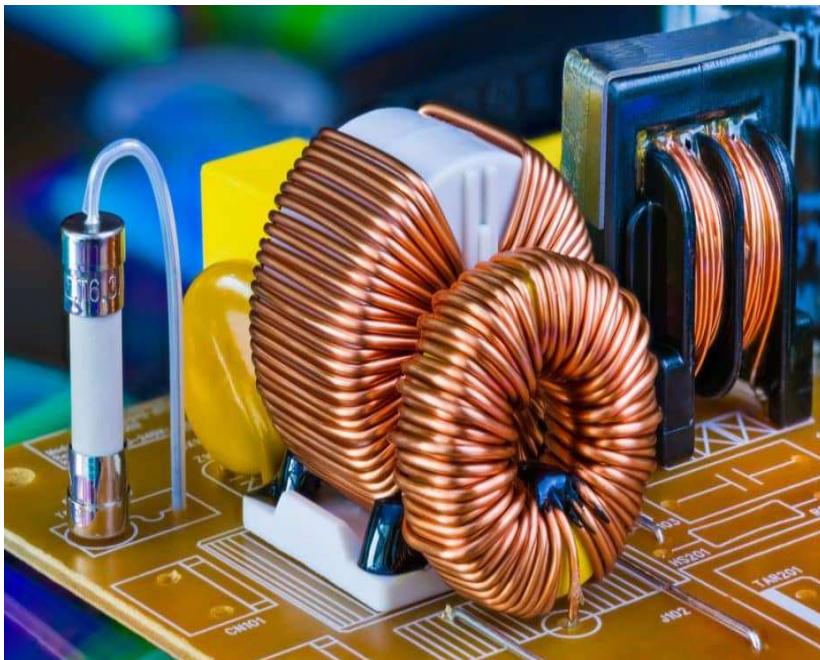


L'inducteur

- Une bobine est constituée d'un enroulement de spires conductrices autour d'un isolant.



L'inducteur



L'inducteur

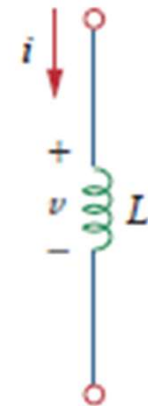
Relation tension-intensité

- Le courant i traversant une bobine d'inductance L est relié à la tension v à ses bornes par la relation suivante :

$$v = L \cdot \frac{di}{dt}$$

L est l'inductance de la bobine et elle s'exprime en Henry(H)

- On peut noter qu'en présence d'un courant continu, la tension aux bornes de la bobine est nulle. Elle se comporte donc comme un **court-circuit**.



L'inducteur

Énergie emmagasinée par la bobine

- Pour une bobine idéale, l'énergie emmagasinée par celle-ci entre le temps $t = 0$ où $i = 0$ et le temps t où $i = i$ est donnée par :

$$E_L = \frac{1}{2} L \cdot i^2$$

- Si l'énergie E_L augmente, la puissance reçue ($P = u(t)i(t)$) est positive est la bobine se comporte comme un récepteur.
- Si l'énergie diminue, la puissance reçue est négative est la bobine se comporte comme un générateur.

L'inducteur

□ Exemple :

Le courant à travers une bobine de 0,1 H varie selon l'équation $i(t) = 10te^{-5t}A$.
Calculer la tension aux bornes de l'inducteur et l'énergie emmagasinée par cette bobine.

□ Solution :

Comme $v = L \frac{di}{dt}$ et $L=0,1$ H, $v = 0,1 \frac{d}{dt}(10te^{-5t}) = e^{-5t} + t(-5)e^{-5t} = e^{-5t}(1 - 5t) V$

L'énergie emmagasinée par la bobine est : $E_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}(0,1)100t^2e^{-10t} J$

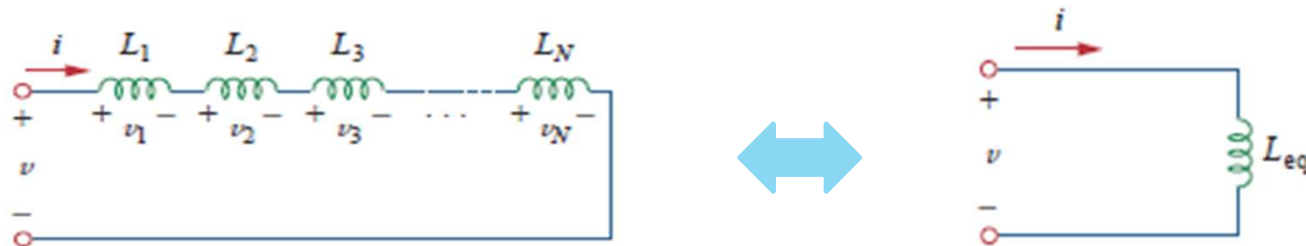
L'inducteur

Association de bobines

□ Association en série :

- ✓ N inducteurs d'inductances $L_1, L_2, \dots, L_N$ placés en série sont équivalents à un condensateur de capacité L_{eq} vérifiant la relation suivante :

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots L_N$$



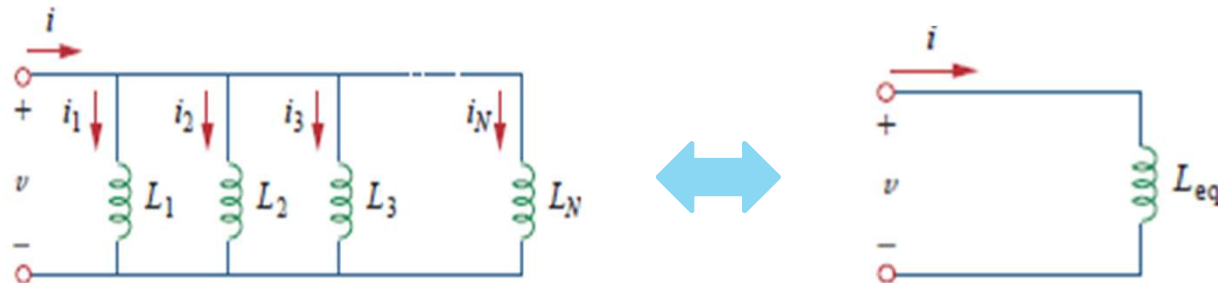
L'inducteur

Association de bobines

□ Association en parallèle :

- ✓ N inducteurs d'inductances $L_1, L_2, \dots, L_N$ placés en parallèle sont équivalents à un condensateur de capacité L_{eq} vérifiant la relation suivante :

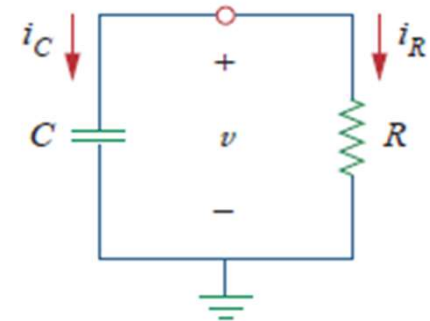
$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N}$$



Circuit RC

Circuit RC libre de source

- On peut être confronté à un circuit RC libre de source lorsque la source d'alimentation en C.C est soudainement débranché.
- L'énergie déjà emmagasinée par le condensateur est remise aux résistors.
- On considère le circuit ci-contre composé d'une résistance en série avec un condensateur initialement chargé.
- L'objectif est de déterminer la réponse du circuit que l'on présume la tension aux bornes du condensateur.



Circuit RC

Circuit RC libre de source

- Condition initiale à $t=0$, $v(t=0) = V_0$

$$i_C + i_R = 0 \Rightarrow C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC} dt$$

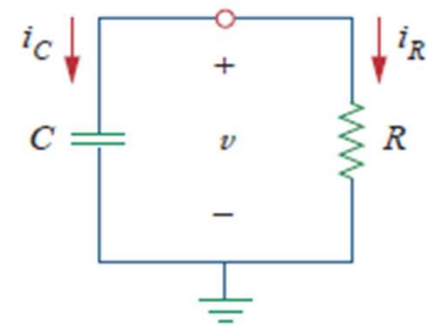
Par intégration des deux cotés, on obtient :

$$\ln v = -\frac{1}{RC} t + \ln A \Rightarrow \ln \frac{v}{A} = -\frac{1}{RC} t$$

$$v(t) = A e^{-t/RC}$$

$$v(0) = A = V_0,$$

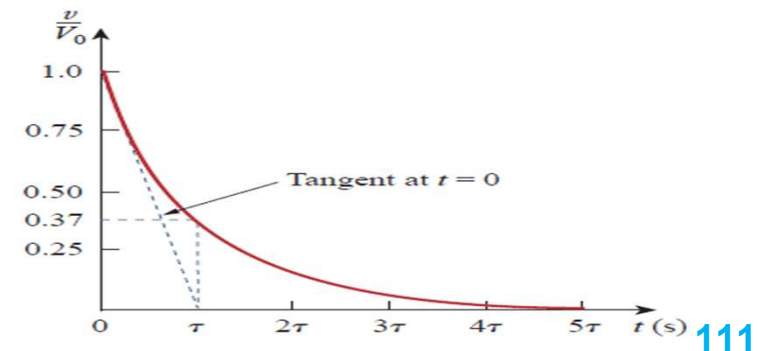
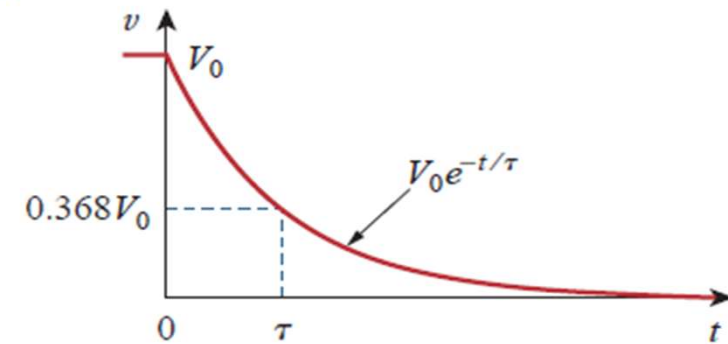
$$v(t) = V_0 e^{-t/RC} = V_0 e^{-t/\tau}, \quad \tau = RC$$



Circuit RC

Circuit RC libre de source

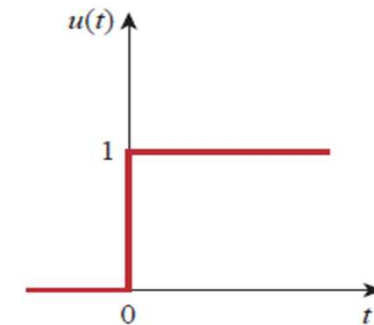
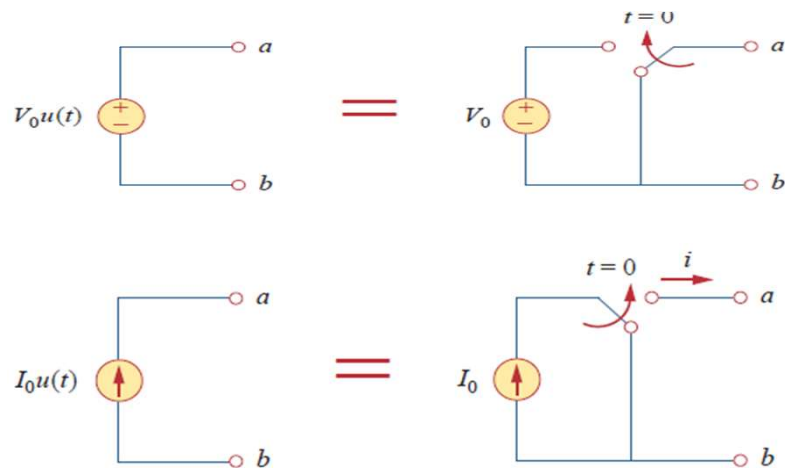
- La **réponse naturelle** d'un circuit se réfère au comportement (en termes de tensions et de courants) du circuit lui-même, sans source extérieure d'alimentation.
- La constante de temps $\tau=RC$ est le temps requis par la réponse naturelle de décroître par un facteur égal à $1/e$ ou de 36,8% par rapport à sa valeur initiale.
- La constante de temps τ peut être déduite par construction graphique en utilisant la tangente à $t=0$.



Circuit RC

Réponse échelon d'un circuit RC

- Lorsque la source de courant continu d'un circuit RC est appliquée brusquement, la source de courant ou de tension peut être modélisé en tant qu'une fonction échelon.
- Dans ce cas la réponse est connue comme réponse échelon.



$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Circuit RC

Réponse échelon d'un circuit RC

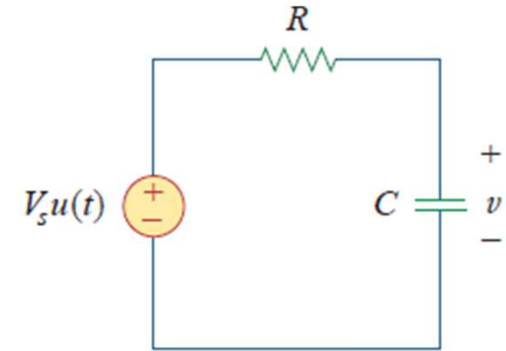
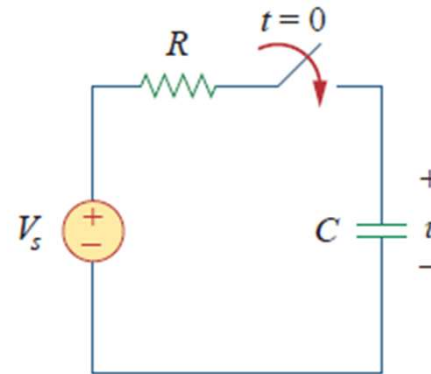
- Considérons le circuit ci-dessous :
- On suppose que V_0 est la tension initiale aux bornes du condensateur.

$$v(0^-) = v(0^+) = V_0$$

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v - V_s u(t)}{R} = 0$$

Pour $t > 0$,

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v - V_s u(t)}{R} = 0$$



Circuit RC

Réponse échelon d'un circuit RC

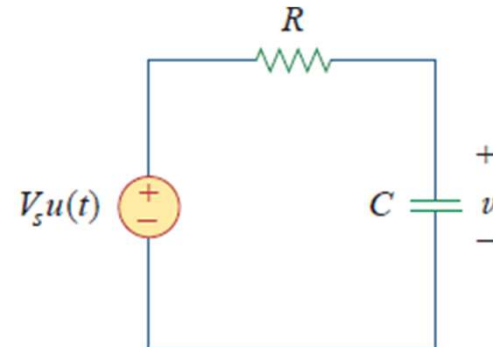
En regroupant les termes, on obtient :

$$\frac{dv}{v - V_s} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\ln(v - V_s) \Big|_{V_0}^{v(t)} = -\frac{t}{RC} \Big|_0^t$$

$$\ln(v(t) - V_s) - \ln(V_0 - V_s) = -\frac{t}{RC} + 0$$

$$\ln \frac{v - V_s}{V_0 - V_s} = -\frac{t}{RC}$$

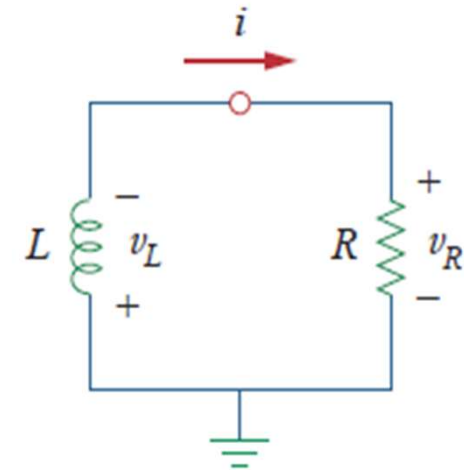


$$v(t) = \begin{cases} V_0, & t < 0 \\ V_s + (V_0 - V_s)e^{-t/\tau}, & t > 0 \end{cases}$$

Circuit RL

Circuit RL libre de source

- On considère le circuit RL ci-contre.
- L'objectif est de déterminer la réponse du circuit que nous supposons être le courant par la bobine.
- On suppose que pour $t=0$ le courant par la bobine est le courant initial I_0



$$v_L + v_R = 0 \Rightarrow L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{di}{i} = - \int_0^t \frac{R}{L} dt \quad \ln i \Big|_{I_0}^{i(t)} = - \frac{Rt}{L} \Big|_0^t \Rightarrow \ln i(t) - \ln I_0 = - \frac{Rt}{L} + 0$$

Circuit RL

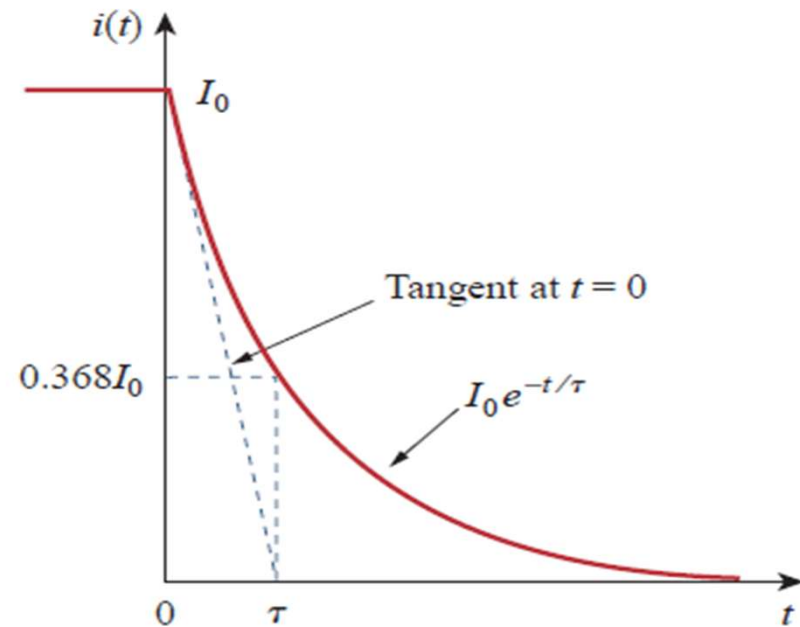
Circuit RL libre de source

$$\ln \frac{i(t)}{I_0} = -\frac{Rt}{L}$$

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$



Circuit RL

Réponse échelon d'un circuit RL

- Considérons le circuit ci-dessous :
- On suppose que I_0 est le courant initial traversant la bobine.

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R} \right) e^{-t/\tau}$$

