

Corrigé Devoir Analyse

Exercice 1.

Montrer, à partir de la définition de limite, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n-1}{2n+1} = 2$

Corrigé:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n-1}{2n+1} = 2$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \left| \frac{4n-1}{2n+1} - 2 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{4n-1}{2n+1} - 2 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{4n-1-4n-2}{2n+1} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{-3}{2n+1} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{3}{2n+1} < \varepsilon \Rightarrow 2n+1 > \frac{3}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow 2n > \frac{3}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow n > \frac{3}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}$$

$$\text{il suffit de prendre : } N_\varepsilon = \left[\frac{3}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} \right]$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \left| \frac{4n-1}{2n+1} - 2 \right| < \varepsilon$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n-1}{2n+1} = 2$$

Exercice 2.

Soit $\{u_n\}$ la suite réelle définie par : $u_1 = 2$, $u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}$

- 1) Calculer u_2 et u_3
- 2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n > 1$
- 3) Montrer que $\{u_n\}$ est décroissante
- 4) En déduire que $\{u_n\}$ converge et déterminer sa limite.

Corrigé:

$$\text{On a } u_1 = 2, u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}$$

1)

$$\bullet u_2 = \frac{1+3u_1}{3+u_1} = \frac{1+3 \times 2}{3+2} = \frac{7}{5}$$

$$\bullet u_3 = \frac{1+3u_2}{3+u_2} = \frac{1+3 \times \frac{7}{5}}{3+\frac{7}{5}} = \frac{\frac{26}{5}}{\frac{22}{5}} = \frac{13}{11}$$

2)

$$\text{Pour } n = 1 \quad u_1 > 1$$

$$\text{On suppose que } u_n > 1 \text{ et on montre que } u_{n+1} > 1$$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{1+3u_n}{3+u_n} - 1 = \frac{1+3u_n-3-u_n}{3+u_n} = \frac{2u_n-2}{3+u_n} = \frac{2(u_n-1)}{3+u_n} > 0$$

$$u_{n+1} - 1 > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 1 \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N} \ u_n > 1$$

3)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n = \frac{1+3u_n-3u_n-(u_n)^2}{3+u_n} = \frac{1-(u_n)^2}{3+u_n} = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n} < 0$$

$$u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$$

Donc u_n est décroissante

4)

Comme u_n est décroissante et majorée donc elle est convergente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$$

$$\frac{1+3L}{3+L} = L \Rightarrow 3L + L^2 = 1 + 3L \Rightarrow L^2 = 1$$

$$\Rightarrow L = 1(\text{accepté}) \text{ ou } L = -1(\text{rejeté})$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

Exercice 3.

Calculer les limites des suites suivantes :

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$$

$$b_n = \frac{n^3}{3^n}$$

$$c_n = \sqrt{4n^2 + 8n + 9} - 2n - 3$$

$$d_n = \ln(2e^{2n} + 3e^n + 5) - 2\ln(e^n + 1)$$

Corrigé:

$$\bullet a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$$

$$1 \leq k \leq n \Rightarrow 1 \leq k^2 \leq n^2 \Rightarrow n^2 + 1 \leq n^2 + k^2 \leq n^2 + n^2 \Rightarrow \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{n^2 + k^2} \leq \frac{1}{n^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + 1} \Rightarrow \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n 1 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2} \leq \frac{1}{n^2 + 1} \sum_{k=1}^n 1 \Rightarrow \frac{n}{2n^2} \leq a_n \leq \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n} \leq a_n \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq 0$$

$$\text{d'après TG } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

$$\bullet b_n = \frac{n^3}{3^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\ln(n^3)}}{e^{\ln(3^n)}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{3\ln(n)}}{e^{n\ln(3)}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{3\ln(n) - n\ln(3)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n(-\frac{3\ln(n)}{n} - \ln(3))} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$$

$$\bullet c_n = \sqrt{4n^2 + 8n + 9} - 2n - 3$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{4n^2 + 8n + 9} - 2n - 3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4n^2 + 8n + 9} - 2n - 3)(\sqrt{4n^2 + 8n + 9} + 2n + 3)}{\sqrt{4n^2 + 8n + 9} + 2n + 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 + 8n + 9 - (4n^2 + 12n + 9)}{\sqrt{4n^2 + 8n + 9} + 2n + 3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4n}{\sqrt{4n^2 + 8n + 9} + 2n + 3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4n}{n(\sqrt{4 + \frac{8}{n} + \frac{9}{n^2}} + 2 + \frac{3}{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{4 + \frac{8}{n} + \frac{9}{n^2}} + 2 + \frac{3}{n}} = \frac{-4}{\sqrt{4} + 2} = -1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n &= -1 \end{aligned}$$

$$\bullet d_n = \ln(2e^{2n} + 3e^n + 5) - 2\ln(e^n + 1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2e^{2n} + 3e^n + 5) - 2\ln(e^n + 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2e^{2n} + 3e^n + 5) - \ln(e^n + 1)^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2e^{2n} + 3e^n + 5}{(e^n + 1)^2}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2e^{2n} + 3e^n + 5}{e^{2n} + 2e^n + 1}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2e^{2n}}{e^{2n}}\right) = \ln\left(\frac{2}{1}\right) = \ln(2) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n &= \ln(2) \end{aligned}$$

Exercice 4.

Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0, \quad 0 \text{ si } x = 0; \quad 2) g(x) = \frac{\sin(x-1)}{x - \sqrt{2-2x+x^2}} \text{ si } x \neq 1, \quad 0 \text{ si } x = 1$$

Corrigé:

1)

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0, \quad 0 \text{ si } x = 0$$

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{(e^x - 1)^2}{e^x - 1} = e^x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

Donc $f(x)$ est continue en $x = 0$

2)

$$g(x) = \frac{\sin(x-1)}{x - \sqrt{2-2x+x^2}} \text{ si } x \neq 1, \quad 0 \text{ si } x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x - \sqrt{2-2x+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)(x + \sqrt{2-2x+x^2})}{(x - \sqrt{2-2x+x^2})(x + \sqrt{2-2x+x^2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)(x + \sqrt{2-2x+x^2})}{x^2 - 2 + 2x - x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)(x+\sqrt{2-2x+x^2})}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \times \frac{x+\sqrt{2-2x+x^2}}{2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) \neq g(1)$$

Donc $g(x)$ n'est pas continue en $x = 1$

Exercice 5.

Peut-on prolonger les fonctions suivantes par continuité aux points proposés? Si oui, donner l'expression du prolongement.

a) $f(x) = \frac{\sin 4x}{\tan 5x}$ en $x = 0$

b) $g(x) = \frac{x^2 + 2|x|}{x}$ en $x = 0$

Corrigé:

a)

$$f(x) = \frac{\sin 4x}{\tan 5x} \text{ en } x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x}{5x} \times \frac{\sin 4x}{4x} \times \frac{5x}{\tan 5x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{5x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\tan 5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{4}{5}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe donc on peut prolonger $f(x)$ par continuité en $x = 0$

$$\text{on note } \bar{f}(x) = \frac{\sin 5x}{x} \text{ si } x \neq 0, \frac{4}{5} \text{ si } x = 0$$

b)

$$g(x) = \frac{x^2 + 2|x|}{x} \text{ en } x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x - 2 = -2$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ $g(x)$ n'existe pas

on ne peut pas prolonger $g(x)$ par continuité en $x = 0$