

Corrigé de Devoir AlgèbreExercice 1

Soit le raisonnement suivant :

- Quand il fait soleil, je mets mes lunettes ou je ne sors pas.
- Je ne reste à la maison que sans lunettes et par temps gris.

Donc si je ne mets pas mes lunettes, c'est qu'il fait gris.

1) Formaliser ce raisonnement en utilisant les variables suivantes :

S: il fait soleil L: je mets mes lunettes M: je reste à la maison

2) Montrer que le raisonnement ci-dessus est correct (valide) en utilisant la table de vérité.

Corrigé:

1.

Le raisonnement :

- Quand il fait soleil, je mets mes lunettes ou je ne sors pas
Quand $\rightarrow$ L'implication ; il fait soleil $\rightarrow S$; je mets mes lunettes $\rightarrow L$; ou $\rightarrow \vee$
je ne sors pas $\rightarrow M$

- Je ne reste à la maison que sans lunettes et par temps gris

Je ne reste à la maison $\rightarrow M$; que $\rightarrow$ L'équivalence; sans lunettes $\rightarrow \bar{L}$; et $\rightarrow \wedge$; par temps gris $\rightarrow \bar{S}$

Donc si je ne mets pas mes lunettes, c'est qu'il fait gris

Donc $\rightarrow$ Implication ; je ne mets pas mes lunettes $\rightarrow \bar{L}$; c'est $\rightarrow$ Implication
qu'il fait gris $\rightarrow \bar{S}$

Formalisation: $((S \Rightarrow (L \vee M)) \wedge (M \Leftrightarrow (\bar{L} \wedge \bar{S}))) \Rightarrow (\bar{L} \Rightarrow \bar{S})$

2.

$((S \Rightarrow (L \vee M)) \wedge (M \Leftrightarrow (\bar{L} \wedge \bar{S}))) \Rightarrow (\bar{L} \Rightarrow \bar{S})$

On a 3 propositions (S, L et M) Donc le nombre de combinaison est $2^3 = 8$

M	L	S	$\bar{L}$	$\bar{S}$	$L \vee M$	$\bar{L} \wedge \bar{S}$	R	Q	$R \wedge Q$	$(\bar{L} \Rightarrow \bar{S})$	$R \wedge Q \Rightarrow (\bar{L} \Rightarrow \bar{S})$
V	V	V	F	F	V	F	V	F	F	V	V
V	V	F	F	V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	F	V	V	F	F	V	V

D'après la tableau de vérité ce raisonnement est toujours vraie (tautologie)

NB: On appelle: $S \Rightarrow (L \vee M) = R \quad M \Leftrightarrow (\bar{L} \wedge \bar{S}) = Q$

Exercice 2

Soient $E = [0, 1]$, $F = [1, 1]$, et $G = [0, 2]$ trois intervalles de $\mathbb{R}$.

Considérons l'application f de E dans G définie par : $f(x) = 2 - x$ et l'application g de f dans

G définie par: $g(x) = x^2 + 1$

1. Déterminer $f(\{\frac{1}{2}\})$; $f^{-1}(\{0\})$; $g([-1, 1])$; $g^{-1}([0, 2])$.

2. L'application f est-elle bijective? Justifier.

3. L'application g est-elle bijective? Justifier.

Corrigé:

1.

- $f(x) = 2 - x$

- $f(\{\frac{1}{2}\}) = ?$

- on a $\frac{1}{2} \in E = [0, 1]$

- $f(\frac{1}{2}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

- Donc $f(\{\frac{1}{2}\}) = \{\frac{3}{2}\}$

- $f^{-1}(\{0\}) = ?$

- $f^{-1}(\{0\}) \in E = [0, 1] \quad \text{tel que } f(x) = 0 \Rightarrow 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

- comme $2 \notin E = [0, 1] \quad \text{Donc } f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$

- $g(x) = x^2 + 1$

- $g([-1, 1]) = ?$

- on a $x \in [-1, 1]$

- on sait que $x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

- $\Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow g(x) \geq 1$

- et $g(1) = g(-1) = 2$

- D'où: $1 \leq g(x) \leq 2$

- $g([-1, 1]) = [1, 2]$

- $g^{-1}([0, 2]) = ?$

- on a $0 \leq x^2 + 1 \leq 2$

- $x^2 + 1 \geq 0$ toujours vraie

- on travaille sur $x^2 + 1 \leq 2$

- $x^2 + 1 \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

- $g^{-1}([0, 2]) = [-1, 1] = F$

2.

f est-elle bijective ?

bijective = injective et surjective

- f injective

$$x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2 - x_1 = 2 - x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

D'où f est injective

- f surjective

$$\forall y \in G, \exists x \in E, f(x) = y$$

$$\text{ona } gf([0, 1]) = [1, 2] \quad f: E \rightarrow G$$

or $G = [0, 2]$ donc $y \in [0, 1]$ n'est pas des antécédents Donc n'est pas surjective

D'où f n'est pas bijective

3.

Injectivité:

$$g(1) = 1^2 + 1 = 2$$

$$g(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$$

$$g(1) = g(-1) \text{ et } 1 \neq -1$$

Donc g n'est pas injective Donc il n'est pas bijective

Exercice 3

On définit sur R^2 la relation R par: $(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow x + y = x' + y'$

1. Montrer que R une relation d'équivalence.

2. Trouver la classe d'équivalence du couple $(0, 0)$.

Corrigé:

1.

Une relation d'équivalence doit-être : Réflexive, transitive et symétrique

• Réflexive: $\forall x \in R, xRx$

$$(x, y)R(x, y) \Leftrightarrow x + y = x + y \text{ est toujours vraie}$$

Donc R est Réflexive

• Transitive: $\forall x, y, z \in R, \text{ Si } (xRy \text{ et } yRz) \Rightarrow xRz$

$$\text{on suppose: } (x, y)R(x', y') \text{ et } (x', y')R(x'', y'')$$

$$x + y = x' + y' \text{ et } x' + y' = x'' + y''$$

$$\text{Donc } x + y = x'' + y'' \Rightarrow (x, y)R(x'', y'')$$

Donc R est Transitive

• Symétrique: $\forall x, y \in R, \text{ Si } xRy \Rightarrow yRx$

$$(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow x + y = x' + y'$$

$$\Leftrightarrow x' + y' = x + y$$

$$\Leftrightarrow (x', y') R (x, y)$$

Donc R est Symétrique

la relation R est Réflexive, Transitive et Symétrique

Donc R est une relation d'équivalence

2.

$$cl_R(a) = \{x \in E / xRa\} \quad \text{on note } [a]$$

$$\text{dans ce cas : } [(0, 0)] = \{(x, y) \in R^2 / (x, y)R(0, 0)\}$$

$$[(0, 0)] = \{(x, y) \in R^2 / x + y = 0\}$$

$$(x, y)R(0, 0) \Leftrightarrow x + y = 0$$

$$x + y = 0 \Rightarrow y = -x$$

droite d'équation $y = -x$