

Corrigé de l'examen Analyse

Exercice 1.

Calculer, les limites des suites suivantes :

$$u_n = \cos\left(\frac{5+\pi n^3}{4n^3+3n+5}\right)$$

$$v_n = \frac{1}{1+4n^2-\sqrt{16n^4+3n^2+3}}$$

Corrigé:

$$\bullet u_n = \cos\left(\frac{5+\pi n^3}{4n^3+3n+5}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{5+\pi n^3}{4n^3+3n+5}\right)$$

$$\text{On calcule } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5+\pi n^3}{4n^3+3n+5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi n^3}{4n^3} = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{5+\pi n^3}{4n^3+3n+5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\bullet v_n = \frac{1}{1+4n^2-\sqrt{16n^4+3n^2+3}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+4n^2-\sqrt{16n^4+3n^2+3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+4n^2+\sqrt{16n^4+3n^2+3}}{(1+4n^2-\sqrt{16n^4+3n^2+3})(1+4n^2+\sqrt{16n^4+3n^2+3})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+4n^2+\sqrt{16n^4+3n^2+3}}{1+16n^4+8n^2-16n^4-3n^2-3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+4n^2+\sqrt{16n^4+3n^2+3}}{5n^2-2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2\left(\frac{1}{n^2}+4+\sqrt{16+\frac{3}{n^2}+\frac{3}{n^4}}\right)}{n^2\left(5-\frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2}+4+\sqrt{16+\frac{3}{n^2}+\frac{3}{n^4}}}{5-\frac{2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4+\sqrt{16}}{5} = \frac{8}{5}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{8}{5}$$

Exercice 2.

1) Calculer, lorsqu'elles existent, les dérivées des fonctions suivantes :

$$\text{a) } y = x^5 \arctan 3x \quad \text{b) } y = \frac{\ln(5-\cos(x^2))}{e^{\sqrt{x^2+1}}} \quad \text{c) } y = 7^{\sin(x^2+1)} \quad \text{d) } y = (x^6 + 3)^{x^2}$$

2) Calculer, à l'aide de la règle de l'Hospital, les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x^2)}{e^x - x - 1} \right) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{\sin x}}$$

3) Ecrire l'équation de la tangente de la courbe : $x^4 + y^3 + x^2 y^2 - e^{xy} - 7 = 0$, au point (0,2).

Corrigé:

1)

$$a) y = x^5 \arctan 3x$$

$$y' = 5x^4 \arctan 3x + x^5 \frac{3}{1+(3x)^2}$$

$$b) y = \frac{\ln(5-\cos(x^2))}{e^{\sqrt{x^2+1}}}$$

$$y' = \frac{\left(\frac{-2x\sin(x^2)}{5-\cos(x^2)}\right)e^{\sqrt{x^2+1}} + \left(\frac{-xe^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}\right)\ln(5-\cos(x^2))}{(e^{\sqrt{x^2+1}})^2}$$

$$c) y = 7^{\sin(x^2+1)}$$

$$y' = 2x \cos(x^2+1) \times \ln(7) \times 7^{\sin(x^2+1)}$$

$$d) y = (x^6 + 3)^{x^2}$$

$$y = e^{x^2 \ln(x^6+3)}$$

$$y' = (x^6 + 3)^{x^2} \left[2x \ln(x^6 + 3) + \frac{6x^7}{x^6+3} \right]$$

2)

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x^2)}{e^x - x - 1} \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x^2)}{e^x - x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{e^x - x - 1} H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(e^x - 1)(1+x^2)} H = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^x(1+x^2) + 2x(e^x - 1)} = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x^2)}{e^x - x - 1} \right) = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+2x)}{\sin x}}$$

$$\text{On calcule } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin x} H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(1+2x)\cos x} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+2x)}{\sin x}} = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{\sin x}} = e^2$$

3)

$$x^4 + y^3 + x^2 y^2 - e^{xy} - 7 = 0, \text{ au point } (0, 2)$$

$$\frac{df(x,y)}{dx}: 4x^3 + 3y'y^2 + 2xy^2 + 2x^2 y'y - e^{xy}(y + xy') = 0$$

$$4(0)^3 + 3y'(2)^2 + 2(0)(2)^2 + 2(0)^2 y'(2) - e^{(0)(2)}((2) + (0)y') = 0$$

$$\text{au point } (0, 2): 12y' - 1(2) = 0 \Rightarrow 12y' = 2 \Rightarrow y' = \frac{1}{6}$$

Donc

$$y = \frac{1}{6}(x - 0) + 2 \Rightarrow y = \frac{1}{6}x + 2$$

Exercice 3.

a) Etudier la continuité de la fonction suivante sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 2|} \text{ si } x \neq 2, \quad 2 \text{ si } x = 2$$

b) Peut on prolonger la fonction g suivante par continuité au point 0 ? Si oui, donner l'expression du prolongement:

$$g(x) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{(\sin x)^2}$$

Corrigé:

a)

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 2|} \text{ si } x \neq 2, \quad 2 \text{ si } x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{-(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x - 1)}{-(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -(x - 1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x - 1)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 1) = 1$$

$$\text{comme } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \text{ donc } f(x) \text{ n'existe pas}$$

Donc $f(x)$ n'est pas continue en $x = 2$

b)

$$g(x) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{(\sin x)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{(\sin x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x})(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})}{(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})(\sin x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 1 - \cos x}{(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})(\sin x)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})(\sin x)^2} \quad \text{or } (\sin x)^2 = 1 - (\cos x)^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})(1 - (\cos x)^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})(1 + \cos x)} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$\text{on note } \bar{g}(x) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{(\sin x)^2} \text{ si } x \neq 0, \quad \frac{1}{4\sqrt{2}} \text{ si } x = 0$$

Exercice 4.

Soit $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$

- Déterminer les intervalles de monotonie de f
- Trouver les extrémums locaux (relatifs) de la fonction f
- Trouver les extrémums globaux (absolus) de la fonction f sur l'intervalle $[-1, 3]$
- Etudier la convexité et la concavité de f et déterminer les points d'inflexions de f .

Corrigé:

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$$

a)

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$$

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x - 2)(x + 2)$$

$$4x(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	

$$f(-2) = -11 \quad f(2) = -11 \quad f(0) = 5$$

f est croissante sur $[-2; 0]$ et $[2; +\infty[$

f est décroissante sur $] -\infty; -2]$ et $[0; 2]$

b)

-2 est un minimum local de f

0 est un maximum local de f

2 est un minimum local de f

c)

$$f(-2) = -11 \quad f(2) = -11 \quad f(0) = 5$$

$$f(-1) = -2 \quad f(3) = 14$$

3 est un maximum global sur $[-1, 3]$

-1 est un minimum global sur $[-1, 3]$

d)

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$$

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 16$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 16 = 0 \Rightarrow 12x^2 = 16 \Rightarrow 3x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = +\sqrt{\frac{4}{3}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{4}{3}}$	$\sqrt{\frac{4}{3}}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	-	+	

f est concave sur $]-\sqrt{\frac{4}{3}}; \sqrt{\frac{4}{3}}[$

f est convexe sur $]-\infty; -\sqrt{\frac{4}{3}}[\cup]\sqrt{\frac{4}{3}}; +\infty[$

$-\sqrt{\frac{4}{3}}$ et $\sqrt{\frac{4}{3}}$ sont des point d'inflexion de f

