

Corrigé TD-2: Algèbre**Exercice 1**

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et R la relation binaire sur E dont le graphe est $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$

1. Vérifier que la relation R est une relation d'équivalence.
2. Faire la liste des classes d'équivalences distinctes et donner l'ensemble quotient E/R .

Corrigé:

1.

$G \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$

• Réflexive: $\forall x \in E . xRx$

on a

$(1, 1) \in G \Leftrightarrow 1 R 1$

$(2, 2) \in G \Leftrightarrow 2 R 2$

$(3, 3) \in G \Leftrightarrow 3 R 3$

$(4, 4) \in G \Leftrightarrow 4 R 4$

D'où R est réflexive

• Symétrique:

d'après G on a

$(1, 2) \in G$ et $(2, 1) \in G$

$(3, 4) \in G$ et $(4, 3) \in G$

D'où R est symétrique

• Transitive:

comme $(1, 2) \in G$ et $(2, 1) \in G$

D'où R est Transitive

Donc R est une relation d'équivalence

2.

$\bar{x} = C_n = \{y \in E / xRy\}$

$\bar{1} = \{y \in E / 1Ry\} = \{1, 2\}$

$\bar{2} = \{y \in E / 2Ry\} = \{1, 2\}$

$\bar{3} = \{y \in E / 3Ry\} = \{3, 4\}$

$\bar{4} = \{y \in E / 4Ry\} = \{3, 4\}$

$E/R = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$

Exercice 2

On considère sur $F(E, E)$ la relation binaire R définie par :

$fRg \Leftrightarrow \exists \varphi \in S(E) \text{ telle que } f \circ \varphi = \varphi \circ g$

- a) Montrer que R est une relation d'équivalence.

b) Décrire la classe d'équivalence d'une fonction donnée $f \in F(E, E)$

Corrigé:

a)

$$F(E, E) = \{f: E \rightarrow E\}$$

$$f R g \Leftrightarrow \exists \varphi \in S(E) / f \circ \varphi = \varphi \circ g$$

$$S(E) = \{f: E \rightarrow E / f \text{ est bijective}\}$$

f est définie sur $F(E, E)$

• Réflexive: $\forall f \in F(E, E) . f R f$

il faut que $\varphi \in S(E)$ et $f \circ \varphi = \varphi \circ g$

on prend $\varphi = Id_E$, $f \circ Id_E = Id_E \circ f \Rightarrow f = f \Rightarrow f R f$

$\Rightarrow R$ est Réflexive

• Symétrique: $\forall f, g \in F(E, E) f R g$ Alors $g R f$

$$f R g \Leftrightarrow \exists \varphi \in S(E) , f \circ \varphi = \varphi \circ g$$

$$\Leftrightarrow \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \varphi^{-1} \circ f = g \circ \varphi^{-1} \Leftrightarrow g \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ f \Leftrightarrow g R f$$

$\Rightarrow R$ est Symétrique

• Transitive: $\forall f, g, h \in F(E, E)$ Si $(f R g \text{ et } g R h) \Rightarrow f R h$

$$f R g \Leftrightarrow \exists \varphi \in S(E) , f \circ \varphi = \varphi \circ g$$

$$g R h \Leftrightarrow \exists \psi \in S(E) , g \circ \psi = \psi \circ h$$

$$f \circ \varphi = \varphi \circ g \Leftrightarrow f \circ \varphi \circ \psi = \varphi \circ g \circ \psi$$

$$\Leftrightarrow f \circ \varphi \circ \psi = \varphi \circ \psi \circ h \quad \text{On pose } \varphi \circ \psi = \Phi$$

$$\Leftrightarrow f \circ \Phi = \Phi \circ h \Rightarrow f R h$$

$\Rightarrow R$ est Transitive

Donc R est une relation d'équivalence

b)

$$C_f = \{g \in F(E, E) / f \circ g\}$$

$$f R g \Leftrightarrow \exists \varphi \in S(E) / f \circ \varphi = \varphi \circ g \Rightarrow g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$$

Exercice 3

Soit R la relation définie sur $\mathbb{R}$ par : $x R y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$

1. Montrer que R est une relation d'équivalence.

2. Déterminer la classe d'équivalence de pour tout réel x .

3. Déterminer l'ensemble quotient.

Corrigé:

1.

$$x R y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

• Réflexive: $\forall x \in \mathbb{R} , x R x$

$$\text{on écrit que } x^2 - x^2 = 0 = x - x \Rightarrow x = x \Rightarrow x R x$$

$\Rightarrow R$ est Réflexive

- Symétrique: $\forall x, y \in R, \text{ Si } xRy \Rightarrow yRx$

$$xRy \Rightarrow x^2 - y^2 = x - y \Leftrightarrow y^2 - x^2 = y - x \Rightarrow yRx$$

$\Rightarrow R$ est Symétrique

- Transitive: $\forall x, y, z \in R, \text{ Si } (xRy \text{ et } yRz) \Rightarrow xRz$

$$xRy \Rightarrow x^2 - y^2 = x - y \quad (1)$$

$$yRz \Rightarrow y^2 - z^2 = y - z \quad (2)$$

$$(1) + (2) = x^2 - z^2 = x - z \Rightarrow xRz$$

$\Rightarrow R$ est Transitive

Donc R est une relation d'équivalence

2.

$$\bar{x} = \{x' \text{ tel que } xRx'\}$$

$$= \{x' \text{ tel que } x^2 - x'^2 = x - x'\}$$

$$(x - x')(x + x') = (x - x') \times 1$$

$$(x - x')(x + x') - (x - x') \times 1 = 0$$

$$(x - x')(x + x' - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - x' = 0 \quad \text{ou} \quad x + x' = 1$$

$$\Leftrightarrow x' = x \quad \text{ou} \quad x' = 1 - x$$

$$\bar{x} = \{x, 1 - x\}$$

3.

$$E/R = \{\{x, 1 - x\}\}$$

Exercice 4

Dans N^* on définit une relation $\ll$ en posant $m \ll n$ s'il existe $k \in N^*$ tel que $n = km$

Montrer que $\ll$ est une relation d'ordre partiel sur N^* .

Corrigé:

- Réflexive: $\forall n \in N^* \quad n \ll n$

$$\Leftrightarrow \exists k \in N^* \text{ tel que } n = kn$$

$$\text{Pour } k = 1 \text{ on a } n = 1n \Rightarrow n = n \Rightarrow n \ll n$$

$\Rightarrow \ll$ est Réflexive

- Antisymétrique: $\forall n, m \in N^*$

$$\text{si } (n \ll m \text{ et } m \ll n) \Rightarrow n = m$$

$$\Rightarrow n \ll m \Rightarrow \exists k \in N^* \text{ tel que } m = kn$$

$$\Rightarrow m \ll n \Rightarrow \exists k' \in N^* \text{ tel que } n = k'm$$

$$\Rightarrow n = kk'n \Rightarrow kk' = 1 \Rightarrow k = k' = 1 \Rightarrow n = m$$

$\Rightarrow \ll$ est Antisymétrique

- Transitive: $\forall n, m, p \in N^*$

$$\text{si } (n \ll m \text{ et } m \ll p) \Rightarrow n \ll p$$

$$n \ll m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } m = kn$$

$$m \ll p \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } p = k'm$$

$$\Rightarrow p = kk'n \text{ ou } kk' \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \ll p$$

$\Rightarrow \ll$ est Transitive

Donc $\ll$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$

Exercice 5

Dans $\mathbb{R}^2$ on définit une relation $\ll$ en posant

$$(x, y) \ll (x', y') \Leftrightarrow x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')$$

Montrer que $\ll$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$. Est-ce une relation d'ordre total

Corrigé:

1. $(x = x \text{ et } y \leq y)$ donc $(x, y) \ll (x, y)$.

$\ll$ est réflexive.

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \ll (x', y') \\ (x', y') \ll (x, y) \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y') \\ x' < x \text{ ou } (x' = x \text{ et } y' \leq y) \end{array} \right\} \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < x' \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x < x' \\ x' = x \text{ et } y' \leq y \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x = x' \text{ et } y \leq y' \\ x' < x \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x = x' \text{ et } y \leq y' \\ x' = x \text{ et } y' \leq y \end{array} \right\} \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = x' \text{ et } y \leq y' \\ x' = x \text{ et } y' \leq y \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = x' \\ y = y' \end{array} \right\} \Rightarrow (x, y) = (x', y') \end{aligned}$$

$\ll$ est antisymétrique.

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \ll (x', y') \\ (x', y') \ll (x'', y'') \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y') \\ x' < x'' \text{ ou } (x' = x'' \text{ et } y' \leq y'') \end{array} \right\} \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < x' \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x < x' \\ x' = x'' \text{ et } y' \leq y'' \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x = x' \text{ et } y \leq y' \\ x' < x'' \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x = x' \text{ et } y \leq y' \\ x' = x'' \text{ et } y' \leq y'' \end{array} \right\} \end{array} \right. \\ &\Rightarrow (x < x'') \text{ ou } (x < x'' \text{ et } y' < y'') \text{ ou } (x < x'' \text{ et } y' < y'') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y'') \\ &\Rightarrow (x < x'') \text{ ou } (x = x'' \text{ et } y \leq y'') \Rightarrow (x, y) \ll (x'', y'') \end{aligned}$$

$\ll$ est transitive.

Finalement $\ll$ est une relation d'ordre (partiel).

Est-ce que cette relation est une relation d'ordre total ?

Considérons deux couples (x, y) et (x', y') .

Il y a plusieurs cas :

Si $x < x'$ alors $(x, y) \ll (x', y')$

Si $x > x'$ alors $(x', y') \ll (x, y)$

Si $x = x'$ et $y < y'$ alors $(x, y) \ll (x', y')$

Si $x = x'$ et $y > y'$ alors $(x', y') \ll (x, y)$

Si $x = x'$ et $y = y'$ alors $(x, y) = (x', y')$ (on a $(x, y) \ll (x', y')$ et $(x', y') \ll (x, y)$)

Tous les couples sont comparables, $\ll$ est une relation d'ordre total.

Exercice 6

1) Montrer que les nombres entiers suivants sont composés, c'est-à-dire non premier

$$i) A = 5^{45} + 4^{30} \quad ii) B = n^4 - 20n^2 + 4, \forall n \in \mathbb{Z}$$

2) Montre que

$$a) \forall n \in \mathbb{N} \quad 14 \mid 3^{4n+2} + 5^{2n+1} \quad b) \forall n \in \mathbb{N} \quad 11 \mid 3^{5n} + 5^{5n+1} + 4^{5n+2}$$

Corrigé:

1.

$$i) A = 5^{45} + 4^{30} = (5^{15})^3 + (4^{10})^3 = (5^{15} + 4^{10})(5^{15})^2 - (5^{15})(4^{10}) + (4^{10})^2$$
$$A > 2$$

$\Rightarrow A$ est composés

$$ii) B = n^4 - 20n^2 + 4 = n^4 - 4n^2 + 4 - 16n^2 = (n^2 - 2)^2 - (4n)^2$$

$$B = (n^2 - 2 - 4n)(n^2 - 2 + 4n) \geq 2$$

$\Rightarrow B$ est composés

2.

$$a) \forall n \in \mathbb{N} \quad 14 \mid 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$$

$$3^{4n+2} + 5^{2n+1} = 3^2 \times (3^4)^n + 5 \times (5^2)^n$$
$$= 9 \times (81)^n + 5 \times (25)^n$$
$$\equiv 9 \times (11)^n + 5 \times (11)^n \quad [14]$$

$$3^{4n+2} + 5^{2n+1} \equiv (9 + 5)(11)^n \equiv 14(11)^n \equiv 0(11)^n \equiv 0 \quad [14]$$

$$b) \forall n \in \mathbb{N} \quad 11 \mid 3^{5n} + 5^{5n+1} + 4^{5n+2}$$

$$3^{5n} + 5^{5n+1} + 4^{5n+2} = 3^{5n} + 5 \times 5^{5n} + 4^{5n} \times 16$$
$$= (243)^n + 5 \times (3125)^n + (1024)^n \times 16$$

$$\text{Or } 243 \equiv 1 [11] ; 3125 \equiv 1 [11] ; 1024 \equiv 1 [11]$$

$$\equiv (1)^n + 5 \times (1)^n + (1)^n \times 16 \quad [11]$$

$$3^{5n} + 5^{5n+1} + 4^{5n+2} \equiv (1 + 5 + 16)(1)^n \equiv 22(1)^n \equiv 0(1)^n \equiv 0 \quad [11]$$

Exercice 7

1) Trouvez tous les $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\sqrt{\frac{11n-5}{n+4}} \in \mathbb{N}$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x - 1 \mid x + 3$

Corrigé:

1.

$$n + 4 \text{ divise } 11n - 5 \Leftrightarrow 11n - 5 = K(n + 4)$$

$$11n - 5 = 11(n + 4) - 5 - 44$$

$$11n - 5 = 11(n + 4) - 49$$

$$\frac{11n-5}{n+4} = 11 - \frac{49}{n+4}$$

$n + 4$ doit diviser 49

$n + 4$	- 49	- 7	- 1	1	7	49
n	- 53	- 11	- 5	- 3	3	45
$11n - 5$	- 588	- 126	- 60	- 38	28	490
$\frac{11n-5}{n+4}$	12	18	60	- 38	4	10
$\sqrt{\frac{11n-5}{n+4}}$	$\sqrt{12} \notin N$	$\sqrt{18} \notin N$	$\sqrt{60} \notin N$	$\times$	$2 \in N$	$\sqrt{10} \notin N$

$$\sqrt{\frac{11n-5}{n+4}} \in N \text{ Si } n = 3$$

2.

$$x - 1 \text{ divise } x + 3 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} / \frac{x+3}{x-1}$$

$$x + 3 = x - 1 + 4$$

$$\frac{x+3}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{4}{x-1}$$

$x - 1$ doit diviser 4

$x - 1$	- 4	- 2	- 1	1	2	4
x	- 3	- 1	0	2	3	5
$x + 3$	0	2	3	5	6	8
$\frac{x+3}{x-1}$	0	- 1	- 3	5	3	2

$$\frac{x+3}{x-1} \in \mathbb{Z} \text{ Si } x \in \{-3, -1, 0, 2, 3, 5\}$$

Exercice 8

- 1) Déterminer le nombre de diviseurs de $10!$
- 2) Sachant que $3285 = 25 \times 123 + 210$ trouver, sans effectuer cette division, le reste et le quotient de la division euclidienne de 3285 par 123.
- 3) Montrer que. $\forall n \geq 0, 6 \mid 5n^3 + n$

Corrigé:

1.

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$10! = 5 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 3 \times 2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2$$

$$10! = 7^1 \times 5^2 \times 3^4 \times 2^8$$

un diviseur K de $10!$ sera de forme

$$K = 7^a \times 5^b \times 3^c \times 2^d \quad \text{avec}$$

$$a \in \{0, 1\} \quad b \in \{0, 1, 2\} \quad c \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\text{nombre de diviseurs de } 10! \text{ est: } (a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1) = 2 \times 3 \times 5 \times 8$$

Donc le nombre de diviseurs de $10!$ est: 270

2.

$$3285 = 25 \times 123 + 210$$

$$a = q \times b + r \quad r < b$$

$$3285 = 25 \times 123 + 123 + 87$$

$$3285 = 26 \times 123 + 87$$

3.

$$\forall n \geq 0 \quad 6 \mid 5n^3 + n$$

$$\text{Initialisation: } n = 0 \quad 6 \mid 0$$

$$n = 1 \quad 6 \mid 6$$

$$\text{Hérédité: on suppose que } 6 \mid 5k^3 + k$$

$$\text{et on montre que } 6 \mid 5(k + 1)^3 + (k + 1)$$

$$5(k + 1)^3 + (k + 1) = 5(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + k + 1$$

$$5(k + 1)^3 + (k + 1) = 5k^3 + 15k^2 + 15k + 5 + k + 1$$

$$5(k + 1)^3 + (k + 1) = 5k^3 + k + 15(k^2 + k) + 6$$

$$6 \mid 5k^3 + k \text{ d'après la récurrence}$$

$$6 \mid 6$$

$$3 \mid 15 \text{ et } 2 \mid k^2 + k \Rightarrow 6 \mid 15(k^2 + k)$$

$$\text{Conclusion } \forall n \geq 0, \quad 6 \mid 5n^3 + n$$

Exercice 9

Calculer le pgcd des couples

$$1.(120, 230)$$

$$2.(210, 135)$$

$$3.(211, 112)$$

Corrigé:

$$1.(120, 230)$$

$$230 = 1 \times 120 + 110$$

$$120 = 1 \times 110 + 10$$

$$110 = 11 \times 10 + 0$$

$$\text{PGCD}(120, 230) = 10$$

$$2.(210, 135)$$

$$210 = 1 \times 135 + 75$$

$$135 = 1 \times 75 + 60$$

$$75 = 1 \times 60 + 15$$

$$60 = 4 \times 15 + 0$$

$$\text{PGCD}(210, 135) = 15$$

3. (211, 112)

$$211 = 1 \times 112 + 99$$

$$112 = 1 \times 99 + 13$$

$$99 = 7 \times 13 + 8$$

$$13 = 1 \times 8 + 5$$

$$5 = 1 \times 3 + 2$$

$$3 = 1 \times 2 + 1$$

$$2 = 1 \times 2 + 0$$

$$\text{PGCD}(211, 112) = 1$$

Exercice 10

Soient a, b des nombres premiers entre eux. Montrer que :

1) $a^a (a+b) = b^b (a+b) = 1$

2) $(a+b)^{ab} = 1$

Corrigé:

1) $a^a (a+b) = b^b (a+b) = 1$

on a $a^a b = 1$

$\text{PGCD}(a, a+b) = \text{PGCD}(a, a+b-a) = \text{PGCD}(a, b) = 1$

$\text{PGCD}(b, a+b) = \text{PGCD}(b, a+b-b) = \text{PGCD}(b, a) = 1$

2) $(a+b)^{ab} = 1$

$d = (a+b)^{ab}$

$\Rightarrow d \mid (a+b)$ et $d \mid ab$

$\Rightarrow d \mid ab \Rightarrow d \mid a$ ou $d \mid b$

- Si $d \mid a$ on a $d \mid a+b$

$\Rightarrow d \mid a+b-a \Rightarrow d \mid b$

$\Rightarrow d = 1$

- Si $d \mid b$ on a $d \mid a+b$

$\Rightarrow d \mid a+b-b \Rightarrow d \mid a$

$\Rightarrow d = 1$

Exercice 11

Trouver tous les couples d'entiers naturels $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ ($a \leq b$) tels que :

i) $a^a b = 18$ et $a+b = 360$

ii) $a^a b = 18$ et $ab = 126$

Corrigé:

i) $a \wedge b = 18$ et $a + b = 360$

$a = 18a'$ avec $a' \in \mathbb{N}$

$b = 18b'$ avec $b' \in \mathbb{N}$

avec $a' \wedge b' = 1$

$a + b = 360 \Rightarrow 18(a' + b') = 360$

$\Rightarrow a' + b' = 20$ on a: $a \leq b \Rightarrow a' \leq b'$

b'	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
a'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	342	324	306	288	270	252	234	216	198	180
a	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180

ii) $a \wedge b = 18$ et $ab = 126$

$a = 18k$ avec $k \in \mathbb{N}$

$b = 18k'$ avec $k' \in \mathbb{N}$

avec $k \wedge k' = 1$

$ab = 126 \Rightarrow (18k)(18k') = 126$

$\Rightarrow (18k)(18k') = 126 \Rightarrow 324kk' = 126$

$\Rightarrow kk' = \frac{126}{324} = \frac{7}{18}$

Ce qui impossible car $k, k' \in \mathbb{N}$ et $\frac{7}{18} \in \mathbb{Q}$

Donc il n'existe aucun couple