

Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés

Durée 1 h 30 mn

Exercice 1

A. En utilisant les tables de vérité, démontrer que

$$i) \neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \quad ii) \neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

B. On dit que "P ou exclusif Q" est vrai si P ou Q est vrai mais pas simultanément P et Q.

Ecrire la table de vérité du "ou exclusif".:

C. En interprétant p par "je pars", q par "tu restes" et r par "il n'y a personne", traduisez les formules logiques suivantes en phrases du langage naturel :

$$(p \wedge \neg q) \Rightarrow r \quad \text{et} \quad (\neg p \vee \neg q) \Rightarrow \neg r$$

Exercice 2

- 1) Le nombre d'élèves d'une classe est inférieur à 40. Si on les regroupe par 9 ou par 12, il en reste 1 chaque fois. Quel est ce nombre ?
- 2) Déterminer les entiers naturels n tels que : $n-1$ divise $n+3$.
- 3) Vérifier que $1000 \equiv 1 [37]$ et en déduire que pour tout entier naturel n, on a $10^{3n} \equiv 1 [37]$.
- 4) Donner la décomposition en facteurs premiers de l'entier 9828
- 5) Déterminer le PGCD(2244,1089) et déterminer l'identité de Bézout correspondante.

Exercice 3

Soit $f: R^2 \rightarrow R^2$, définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$

- 1) f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
- 2) Déterminer $f([0, 1] \times [0, 1])$

Exercice 4

Ordre lexicographique. Soit $X = (x_1, x_2) \in E^2$ et $Y = (y_1, y_2) \in E$

on dit que $X \leq Y$ si $(x_1 \leq y_1)$ ou $(x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2)$

Montrer que l'on définit ainsi une relation d'ordre sur E^2 . Cet ordre est-il total ?

Bonne Chance