

Corrigé de l'examen Algèbre

Exercice 1

A l'aide de la méthode des tables de vérité, dites si les formules suivantes sont des tautologies.

i) $P \vee \bar{P}$

principe du tiers exclu

ii) $P \wedge \bar{P}$

principe de non – contradiction

iii) $\bar{P} \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$

le faux implique tout

iv) $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

transitivité de $\Rightarrow$

Corrigé:

i) $P \vee \bar{P}$

P	$\bar{P}$	$P \vee \bar{P}$
V	F	V
V	F	V
F	V	V
F	V	V

Donc la formule est toujours vraie(tautologies)

ii. $P \wedge \bar{P}$

P	$\bar{P}$	$P \wedge \bar{P}$	$\overline{P \wedge \bar{P}}$
V	F	F	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	V	F	V

Donc la formule est toujours vraie(tautologies)

iii. $\bar{P} \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$

P	Q	$\bar{P}$	$P \Rightarrow Q$	$\bar{P} \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Donc la formule est toujours vraie(tautologies)

iv) $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
---	---	---	-------------------	-------------------	-------------------	--	--

V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Donc la formule est toujours vraie (tautologies)

Exercice 2

On considère le couple d'entiers ($a = 60, b = 84$)

1. Calculer $PGCD(a, b)$ par l'algorithme d'Euclide.
2. En déduire une identité de Bézout.
3. Calculer $PPCM(a, b)$.
4. Déterminer l'ensemble des couples (u, v) d'entiers relatifs tels que : $au + bv = PGCD(a, b)$
5. Donner la décomposition en facteurs premiers de a et b .
6. En déduire la décomposition en facteurs premiers de $PGCD(a, b)$ et $PPCM(a, b)$, et retrouver les résultats des questions 1 et 3

Corrigé:

1.

$$84 = 60 \times 1 + 24$$

$$60 = 24 \times 2 + 12$$

$$24 = 12 \times 2 + 0$$

$$PGCD(a, b) = 12$$

2.

on a :

$$12 = 60 - 24 \times 2$$

$$12 = 60 \times 1 - (84 - 60) \times 2$$

$$12 = 60 \times 3 - 84 \times 2$$

$$12 = 60 \times 3 - 84 \times 2$$

$$\text{identité de Bézout : } 12 = 3a - 2b$$

3.

$$\text{on a : } PGCD(a, b) = 12 \quad \text{et} \quad a = 60, b = 84$$

$$PPCM(a, b) = \frac{ab}{PGCD(a, b)} = \frac{60 \times 84}{12} = 420$$

$$PPCM(a, b) = 420$$

4.

$$60u + 84v = 60 \times 3 - 84 \times 2$$

$$60u - 60 \times 3 = -84v - 84 \times 2$$

$$60(u - 3) = 84(-v - 2)$$

$$5(u - 3) = 7(-v - 2)$$

$$\text{comme PGCD}(5, 7) = 1$$

$$5 \mid (-v - 2) \Rightarrow v = -5k - 2$$

$$7 \mid (u - 3) \Rightarrow u = 7k + 3$$

$$S = \{-5k - 2; 7k + 3\}$$

D'où $(u, v) = (3 + 7k, -2 - 5k), k \in \mathbb{Z}$

5) Décomposition en facteurs premiers de 60 et 84:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7$$

6) PGCD les facteurs communs avec les plus petits exposants:

$$\text{PGCD}(60, 84) = 2^2 \times 3 = 12$$

PPCM les facteurs avec les plus grands exposants:

$$\text{PPCM}(60, 84) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$$

Donc on retrouve bien les résultats de questions 1 et 3.

Exercice 3

On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne définie par : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

1. Montrer que l'application $x \rightarrow x^3$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, *)$ vers $(\mathbb{R}, +)$.

2. En déduire que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe commutatif.

Exercice 3:

On définit $*$ sur $\mathbb{R}$: $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

1) Mq $f(x) = x^3$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, *)$ vers $(\mathbb{R}, +)$

f est un morphisme $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x * y) = f(x) + f(y)$
 f est un isomorphisme $\Leftrightarrow f$ est morphisme et bijectif

• Mq f est une morphisme:

$$f(x * y) = (x * y)^3 = (\sqrt[3]{x^3 + y^3})^3 = x^3 + y^3$$

Donc $f(x * y) = f(x) + f(y)$ D'où f est morphisme

• Mq f est bijective:

Injectivité: $f(x) = f(y) \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$ f est injective

Surjectivité: $\forall z \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = z \Rightarrow x^3 = z$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{z} \in \mathbb{R}$$

Donc f est surjective

$$\Rightarrow f \text{ est bijective}$$

Comme f est morphisme et bijectif alors f est isomorphisme.

2) Mg $(R, *)$ est un groupe commutatif:

Comme $(R, +)$ est un groupe abélien et que $(R, *)$ est isomorphe à $(R, +)$ alors:

$(R, *)$ est un groupe commutatif.

Si deux structures sont isomorphes, alors elles ont les mêmes propriétés algébriques.

