

Corrigé TD-3 Dérivées et applications**Exercice 1.**

Calculer, lorsqu'elles existent, les dérivées des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} 1) y &= 2\sqrt[3]{x^2} ; 2) y = \ln(3 + \sin 5x) ; 3) y = \sin(e^{x^2}) ; 4) y = 3^{\tan 5x} ; 5) y = \ln(\ln x) \\ 6) y &= (x^2 + \cos 2x)^5 \sin(e^{-3x} + 5x) ; 7) y = \arcsin(4 - x^2) ; \\ 8) y &= \arctan \sqrt{x} ; 9) y = \frac{e^{\sqrt{x}} \cos(x^3)}{\cos 3x} ; 10) y = \frac{\arccos(1-e^{-x})}{\ln \sqrt{1+x^2}} ; 11) y = (x^2 + 1)^{\sin x} \end{aligned}$$

Corrigé:

$$1) y = 2\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y' = \frac{4}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$2) y = \ln(3 + \sin 5x) \Rightarrow y' = \frac{5 \cos 5x}{3 + \sin 5x}$$

$$3) y = \sin(e^{x^2}) \Rightarrow y' = 2xe^{x^2} \cos(e^{x^2})$$

$$4) y = 3^{\tan 5x} \Rightarrow y' = 3^{\tan 5x} \ln(3) 5(\tan 5x)^2 + 5 \quad (a^{u(x)})' = a^{u(x)} \ln(a)(u(x))'$$

$$5) y = \ln(\ln x) \Rightarrow y' = \frac{1}{x \ln x}$$

$$6) y = (x^2 + \cos 2x)^5 \sin(e^{-3x} + 5x)$$

$$\Rightarrow y' = (x^2 + \cos 2x)^4 [5(2x - 2\sin 2x)\sin(e^{-3x} + 5x) + (-3e^{-3x} + 5)\cos(e^{-3x} + 5x)(x^2 + \cos 2x)]$$

$$7) y = \arcsin(4 - x^2) \Rightarrow y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-(4-x^2)^2}}$$

$$8) y = \arctan \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

$$9) y = \frac{e^{\sqrt{x}} \cos(x^3)}{\cos 3x} \Rightarrow y' = \frac{e^{\sqrt{x}} [\frac{\cos(x^3)}{2\sqrt{x}} - 3x^2 \sin(x^3)] (\cos 3x) + 3 \sin x (e^{\sqrt{x}} \cos(x^3))}{(\cos 3x)^2}$$

$$10) y = \frac{\arccos(1-e^{-x})}{\ln \sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y' = \frac{\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-(1-e^{-x})^2}} \ln \sqrt{1+x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2})} \arccos(1-e^{-x})}{(\ln \sqrt{1+x^2})^2}$$

$$11) y = (x^2 + 1)^{\sin x} \Rightarrow y' = (x^2 + 1)^{\sin x} (\cos x \ln(x^2 + 1) + \frac{2x \sin x}{x^2 + 1})$$

Exercice 2.

Etudier la continuité et la dérivabilité pour les fonctions suivantes :

$$1) f(x) = |x - 1| \quad 2) f(x) = x|x| \quad 3) f(x) = x \cos \frac{1}{x^2} \text{ si } x \neq 0, 0 \text{ si } x = 0$$

$$4) f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0, 0 \text{ si } x = 0$$

Corrigé:

$$1) f(x) = |x - 1|$$

$$f(x) = x - 1 \text{ si } x \geq 1, f(x) = -(x - 1) \text{ si } x < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$

f est dérivable en 1 ?

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x - 1 - 0}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{-(x - 1) - 0}{x - 1} = -1$$

Donc f n'est pas dérivable en 1

2) $f(x) = x|x|$

$$f(x) = x^2 \text{ si } x \geq 0, f(x) = -x^2 \text{ si } x < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$

f est dérivable en 0 ?

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{x^2}{x} = 0$$

Donc f est dérivable en 0

3) $f(x) = x \cos \frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$, 0 si $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x^2}$$

$$\text{On a : } -1 \leq \cos \frac{1}{x^2} \leq 1 \Rightarrow -x \leq x \cos \frac{1}{x^2} \leq x \Rightarrow -x \leq f(x) \leq x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x \leq \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \leq 0$$

$$\text{d'après TG } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x^2}$$

Pas de limite Donc f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$

4) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, 0 si $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$$

$$\text{On a : } -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2 \Rightarrow -x^2 \leq f(x) \leq x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 \leq \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \leq 0$$

d'après TG $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow -x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} -x \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} x$$

d'après TG $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 = f'(0)$$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Exercice 3.

Montrer que :

1) La fonction $y = e^x \sin x$ vérifie la relation: $y'' - 2y' + 2y = 0$

2) La fonction $y = e^{-x} \sin 2x$ vérifie la relation: $y'' + 2y' + 5y = 0$

Corrigé:

1)

$$y = e^x \sin x$$

$$y' = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$y'' = 2e^x \cos x$$

$$y'' - 2y' + 2y = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x - 2e^x \cos x + 2e^x \sin x = 0$$

Donc la relation est vraie

2)

$$y = e^{-x} \sin 2x$$

$$y' = -e^{-x} \sin 2x + 2e^{-x} \cos 2x$$

$$y'' = -3e^{-x} \sin 2x - 4e^{-x} \cos 2x$$

$$y'' + 2y' + 5y = -3e^{-x} \sin 2x - 4e^{-x} \cos 2x - 2e^{-x} \sin 2x + 4e^{-x} \cos 2x + 5e^{-x} \sin 2x = 0$$

Donc la relation est vraie

Exercice 4.

Calculer les dérivées des fonctions implicites y suivantes:

1) $x^4 + y^4 = x^2 y^2$; 2) $x^3 + y^3 + x^2 y^2 - e^{xy} = 0$; 3) $2y \ln y = x$; 4) $y = 1 + x e^y$

Corrigé:

1) $x^4 + y^4 = x^2 y^2$

$$4x^3 + 4y'y^3 = 2xy^2 + 2x^2yy' \Rightarrow 4y'y^3 - 2x^2yy' = 2xy^2 - 4x^3$$

$$y' = \frac{2xy^2 - 4x^3}{4y^3 - 2x^2y}$$

2) $x^3 + y^3 + x^2 y^2 - e^{xy} = 0$

$$3x^2 + 3y'y^2 + 2xy^2 + 2x^2yy' - e^{xy}(y + xy') = 0$$

$$y' = \frac{-3x^2 - 2xy^2 + ye^{xy}}{3y^2 + 2x^2y - xe^{xy}}$$

$$3) 2y \ln y = x$$

$$2y' \ln y + 2y \frac{1}{y} y' = 1$$

$$2y' \ln y + 2y' = 1$$

$$y'(2 \ln y + 2) = 1$$

$$y' = \frac{1}{2 \ln y + 2}$$

$$4) y = 1 + xe^y$$

$$y' = e^y + y'xe^y$$

$$y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$$

Exercice 5.

Ecrire l'équation de la tangente à chacune des courbes au point indiqué :

$$1) y = \arctan 2x, M(0, 0) \quad ; \quad 2) y = \cos 2x - \ln(1 + \sin x), M(\pi, 1) ;$$

$$3) x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0, M(-1, 3)$$

Corrigé:

$$1) y = \arctan 2x, M(0, 0)$$

$$y' = \frac{2}{1 + 4x^2}$$

$$M(0, 0) \quad y'(0) = 2$$

$$y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x$$

$$2) y = \cos 2x - \ln(1 + \sin x), M(\pi, 1)$$

$$y' = -2\sin 2x - \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$M(\pi, 1) \quad y' = -2\sin 2\pi - \frac{\cos \pi}{1 + \sin \pi} = 1$$

$$M(\pi, 1) \quad y = \cos 2\pi - \ln(1 + \sin \pi) = 1$$

$$y - 1 = 1(x - \pi) \Rightarrow y = x - \pi + 1$$

$$3) x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0, M(-1, 3)$$

$$3x^2 + 2y'y + 2 = 0$$

$$y' = \frac{-3x^2 - 2}{2y}$$

$$M(-1, 3) \quad y' = \frac{-3(-1)^2 - 2}{2(3)} = \frac{-5}{6}$$

$$y - 3 = \frac{-5}{6}(x + 1) \Rightarrow y = \frac{-5}{6}x + \frac{13}{6}$$

Exercice 6.

Calculer, à l'aide de la règle de L'Hôpital, les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} ; 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} ; 3) \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{x - \pi} ; 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} ; 5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x^2 + 1))$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) ; 7) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} ; 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} ; 9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{2}{x}\right)^{x^2}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) ; 11) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos 3x}{x^2}\right)$$

Corrigé:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{x - \pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{x - \pi} H = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\cos x}{1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{x - \pi} = -1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} H = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3x^2} H = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x^2 + 1))$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x^2 + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} H = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x^2 + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}\right) = +\infty(1 - 0) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x^2 + 1)) = +\infty$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \text{ on pose } t = \frac{1}{x} \quad x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow 0$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} H = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 1$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+\sin x)}{x}}$$

On calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x} H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^1 = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = e$$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2$$

9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{2}{x}\right)^{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{2}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln(\cos \frac{2}{x}) x^2}$$

On calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln(\cos \frac{2}{x})$ on pose $\frac{2}{x} = u$ $x \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln(\cos \frac{2}{x}) &= \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{2}{u}\right)^2 \ln(\cos u) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{4 \ln(\cos u)}{u^2} H = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{4 \frac{1}{\cos u} (-\sin u)}{2u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} -2 \left(\frac{\sin u}{u}\right) \left(\frac{1}{\cos u}\right) = -2(1)(1) = -2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \ln(\cos \frac{2}{x}) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{2}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln(\cos \frac{2}{x}) x^2} = e^{-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{2}{x}\right)^{x^2} = e^{-2}$$

10) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} H = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} H = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = 0$$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos 3x}{x^2}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{\cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{2x} H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \cos 3x}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos 3x}{x^2}\right) = \frac{9}{2}$$

Exercice 7.

Trouver les intervalles de monotonie, les intervalles de convexité et de concavité, les extrémums locaux des fonctions suivantes:

$$1) y = 3x^4 - 4x^3$$

$$2) y = x^2 e^{-x}$$

$$3) y = 3x^{\frac{5}{3}} - 15x^{\frac{2}{3}}$$

Corrigé:

$$1) y = 3x^4 - 4x^3$$

- les intervalles de monotonie

$$y' = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1)$$

$$y' = 0$$

$$12x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-	-	+	

y est croissante sur $[1; +\infty[$

y est décroissante sur $] -\infty; 1]$

- les extrémums locaux

1 est un minimum local de y

- les intervalles de convexité et de concavité

$$y' = 12x^3 - 12x^2$$

$$y'' = 36x^2 - 24x = 12x(3x - 2)$$

$$12x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
y''	+	-	+	

f est concave sur $]0; \frac{2}{3}]$

f est convexe sur $] -\infty; 0] \cup [\frac{2}{3}; +\infty[$

$$2) y = x^2 e^{-x}$$

- les intervalles de monotonie

$$y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) = xe^{-x}(2 - x)$$

$$y' = 0$$

$$x(2 - x) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	-	+	-	

y est croissante sur $[0; 2[$

y est décroissante sur $] - \infty ; 0[\cup] 2 ; + \infty [$

- les extrémums locaux

$$y(0) = (0)^2 e^{-(0)} = 0$$

$$y(2) = (2)^2 e^{-(2)} = 4e^{-2} \approx 0,54$$

0 est un minimum local de y

2 est un maximum local de y

- les intervalles de convexité et de concavité

$$y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x}$$

$$y'' = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\Delta = 8$$

$$x = 2 \pm \sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{2}$	$2 + \sqrt{2}$	$+\infty$
y''	+	-	+	

f est concave sur $]2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}[$

f est convexe sur $] - \infty ; 2 - \sqrt{2}[\cup] 2 + \sqrt{2}; + \infty [$

$$3) y = 3x^{\frac{5}{3}} - 15x^{\frac{2}{3}}$$

- les intervalles de monotonie

$$y' = 5x^{\frac{2}{3}} - 10x^{-\frac{1}{3}} = 5x^{-\frac{1}{3}}(x - 2) = \frac{5(x-2)}{\sqrt[3]{x}}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 5(x - 2) = 0$$

$$x = 2, \quad x = 0$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y''	+	-	+	

y est décroissante sur $[0; 2[$

y est croissante sur $] - \infty ; 0[\cup] 2 ; + \infty [$

- les extrémums locaux

$$y(0) = 3(0)^{\frac{5}{3}} - 15(0)^{\frac{2}{3}} = 0$$

$$y(2) = 3(2)^{\frac{5}{3}} - 15(2)^{\frac{2}{3}} \approx -14,3$$

0 est un maximum local de y

2 est un minimum local de y

- les intervalles de convexité et de concavité

$$y' = 5x^{\frac{2}{3}} - 10x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y' = \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{10}{3}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{10(x+1)}{3\sqrt[3]{x^3}}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 10(x + 1) = 0$$

$$x = -1, \quad x = 0$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
y''	$-$	$+$		$+$

f est concave sur $] - \infty; -1]$

f est convexe sur $] -1; 0[\cup]0; +\infty[$

Exercice 8.

Trouver les minimums et maximums absolus des fonctions suivantes:

1) $y = -3x^4 + 6x^2 - 1$ sur $[-2, 2]$; 2) $y = 2x^3 - 15x^2$ sur $[1, 5]$

Corrigé:

1)

$$y = -3x^4 + 6x^2 - 1 \text{ sur } [-2, 2]$$

$$y'(x) = -12x^3 + 12x = 12x(-x^2 + 1)$$

$$y'(x) = 0 \Rightarrow 12x(-x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1, x = 1$$

$$y(-2) = -3(-2)^4 + 6(-2)^2 - 1 = -25$$

$$y(2) = -3(2)^4 + 6(2)^2 - 1 = -25$$

$$y(0) = -1$$

$$y(-1) = 2$$

$$y(1) = 2$$

maximum absolue 2 en $x = \pm 1$

minimum absolue -25 en $x = \pm 2$

2)

$$y = 2x^3 - 15x^2 \text{ sur } [1, 5]$$

$$y' = 6x^2 - 30x = x(6x - 30)$$

$$y'(x) = 0 \Rightarrow x(6x - 30) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } 6x - 30 = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 5$$

$$y(1) = 2(1)^3 - 15(1)^2 = -13$$

$$y(5) = 2(5)^3 - 15(5)^2 = -125$$

$$y(5) = -125$$

maximum absolue -13 en $x = 1$

minimum absolue -125 en $x = 5$

Exercice 9.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^5 - 5x + 1$

Etudier les variations de f et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

Corrigé:

$$f(x) = x^5 - 5x + 1$$

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1) = 5(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 5(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

$(x^2 + 1)$ est toujours positif

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x = -1 \text{ ou } x = 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	

$$f(-1) = (-1)^5 - 5(-1) + 1 = 5$$

$$f(1) = (1)^5 - 5(1) + 1 = -3$$

- Sur $] -\infty, -1]$ f est continue est strictement croissante, elle varie de $-\infty$ à 5
Comme $0 \in] -\infty, 5]$, il existe une solution unique α_1 dans cet intervalle
- Sur $[-1, 1]$ f est continue est strictement décroissante, elle varie de 5 à -3
Comme $0 \in [-3, 5]$, il existe une solution unique α_2 dans cet intervalle
- Sur $]1, +\infty[$ f est continue est strictement décroissante, Elle varie de -3 à $+\infty$
Comme $0 \in [-3, +\infty[$, il existe une solution unique α_3 dans cet intervalle

Conclusion : L'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ admet exactement trois solutions réelles

Exercice 10.

Donner le développement limité d'ordre 5 de f au point 0 et déduire la série de Taylor de f en 0.

$$1) f(x) = e^{-3x} ; 2) f(x) = \sin 2x ; 3) f(x) = \ln(x + 1) ; 4) f(x) = \frac{1}{x+1}$$

Corrigé:

$$1) f(x) = e^{-3x}$$

- le développement limité d'ordre 5 de f au point 0

$$f'(x) = -3e^{-3x}, f''(x) = 9e^{-3x}, f^{(3)}(x) = -27e^{-3x}, f^{(4)}(x) = 81e^{-3x}, f^{(5)}(x) = -243e^{-3x}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f''(0)}{2}(x - 0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x - 0)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x - 0)^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}(x - 0)^5 + o(x^5)$$

$$f(x) = 1 - 3x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4 - \frac{81}{40}x^5 + o(x^5)$$

- la série de Taylor de f en 0

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-3x)^k$$

$$2) f(x) = \sin 2x$$

- le développement limité d'ordre 5 de f au point 0

$$f'(x) = 2\cos 2x, f''(x) = -4\sin 2x, f^{(3)}(x) = -8\cos 2x, f^{(4)}(x) = 16\sin 2x$$

$$f^{(5)}(x) = 32\cos 2x$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f''(0)}{2}(x - 0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x - 0)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x - 0)^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}(x - 0)^5 + o(x^5)$$

$$f(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5)$$

- la série de Taylor de f en 0

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{(k+1)!} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} (2x)^{2k+1}$$

3) $f(x) = \ln(x+1)$

- le développement limité d'ordre 5 de f au point 0

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{(x+1)^3}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(x+1)^4}, \quad f^{(5)}(x) = \frac{24}{(x+1)^5}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}(x-0)^5 + o(x^5)$$

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

- la série de Taylor de f en 0

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} (x)^k$$

4) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

- le développement limité d'ordre 5 de f au point 0

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}, \quad f^{(3)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x+1)^5}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{-120}{(x+1)^6}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}(x-0)^5 + o(x^5)$$

$$f(x) = 1 - x + \frac{2}{2}x^2 - \frac{6}{3 \times 2 \times 1}x^3 + \frac{24}{4 \times 3 \times 2 \times 1}x^4 = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x_5)$$

$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5)$$

- la série de Taylor de f en 0

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$