

Examen

Exercice 1.

Soit $\{u_n\}$ la suite réelle définie par :
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n} \end{cases} \text{ pour } n \geq 2$$

- 1) Calculer u_2 et u_3
- 2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $2 \leq u_n \leq 3$
- 3) Montrer que $\{u_n\}$ est strictement croissante
- 4) En déduire que $\{u_n\}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 2.

- 1) Etudier la continuité des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6\sin(x+1)}{x^3+1} & \text{si } x \neq -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \end{cases} ; \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{|x-3|} & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

- 2) Calculer, lorsqu'elles existent, les dérivées des fonctions suivantes :

$$a) y = x^5 + 5^x + \sqrt[5]{x} + \frac{1}{x^5} ; \quad b) y = \frac{\ln(6+e^{-2x})}{\cos(x^2)} ;$$

$$c) y = e^{\frac{1}{x}} \sin(x^3 + 5) ; \quad d) y = (5 + \arctan 3x)^4 ;$$

- 3) Calculer, à l'aide de la règle de l'Hospital, les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin \pi x}{\ln x} \right) ; \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(3^{1/x} - 1)$$

Exercice 3.

Soit $f(x) = x^6 - 48x^2 + 1$

- a) Déterminer les intervalles de monotonie de f
- b) Trouver les extrémums locaux de la fonction f
- c) Trouver les intervalles de convexité et de concavité de f et déterminer les points d'inflexions de f .