

Corrigé de l'examen Analyse

Exercice 1.

Calculer, les limites des suites suivantes :

a) $u_n = \frac{1}{n^2 - \sqrt{n^4 + 3n^2 + 3}}$ b) $u_n = \frac{3^n + 5^n}{7^n - 6^n}$ c) $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right)$

Corrigé:

a) $u_n = \frac{1}{n^2 - \sqrt{n^4 + 3n^2 + 3}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 - \sqrt{n^4 + 3n^2 + 3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + \sqrt{n^4 + 3n^2 + 3}}{(n^2 - \sqrt{n^4 + 3n^2 + 3})(n^2 + \sqrt{n^4 + 3n^2 + 3})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + \sqrt{n^4 + 3n^2 + 3}}{n^4 - n^4 - 3n^2 - 3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + \sqrt{n^4 + 3n^2 + 3}}{-3n^2 - 3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2(1 + \sqrt{1 + \frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^4}})}{-3n^2(-\frac{3}{n^2})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^4}}}{-3 - \frac{3}{n^2}} = \frac{2}{-3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{2}{3}$$

b) $u_n = \frac{3^n + 5^n}{7^n - 2^n}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + 5^n}{7^n - 2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3^n}{7^n} + \frac{5^n}{7^n}}{\frac{7^n}{7^n} - \frac{2^n}{7^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\frac{3}{7})^n + (\frac{5}{7})^n}{1 - (\frac{2}{7})^n} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

c) $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right)$

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^n \ln(k+2) - \sum_{k=1}^n \ln(k+1)$$

$$= \ln(n+2) \sum_{k=2}^n \ln(k+1) - \ln(2) \sum_{k=2}^n \ln(k+1) = \ln(n+2) - \ln(2)$$

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) = \ln(n+2) - \ln(2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+2) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2) = +\infty - 2 = +\infty$$

Exercice 2.

1) Calculer, lorsqu'elles existent, les dérivées des fonctions suivantes :

a) $y = \ln(5 - \cos(x^2)) + 5^{x^2}$ b) $y = (3 + \sin 2x)^{\frac{1}{x}}$

2) Calculer, à l'aide de la règle de L'Hôpital, les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^x$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$

3) Ecrire l'équation de la tangente de la courbe: $x^3 + y^3 - 3\sin xy - 1 = 0$ au point (0,1).

Corrigé:

1)

a) $y = \ln(5 - \cos(x^2)) + 5^{x^2}$

Remarque: $(a^{f(x)})' = (f(x))' \times \ln(a) \times a^{f(x)}$

$y' = \frac{(5 - \cos(x^2))'}{5 - \cos(x^2)} + (x^2)' \times \ln(5) \times 5^{x^2}$

$y' = \frac{2x \sin(x^2)}{5 - \cos(x^2)} + 2x \ln(5) \times 5^{x^2}$

b) $y = (3 + \sin 2x)^{\frac{1}{x}}$

puisque $3 + \sin 2x \geq 0$

$y = e^{\frac{1}{x} \ln(3 + \sin 2x)}$

$y' = \left[\frac{1}{x} \ln(3 + \sin 2x) \right]' e^{\frac{1}{x} \ln(3 + \sin 2x)}$

$y' = \left[-\frac{1}{x^2} \ln(3 + \sin 2x) + \frac{2 \cos 2x}{x(3 + \sin 2x)} \right] e^{\frac{1}{x} \ln(3 + \sin 2x)}$

$y' = \left[\frac{2 \cos 2x}{3 + \sin 2x} - \frac{\ln(3 + \sin 2x)}{x} \right] \frac{e^{\frac{1}{x} \ln(3 + \sin 2x)}}{x}$

2)

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^x$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(\cos \frac{1}{x})}$

On calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(\cos \frac{1}{x})$ on pose $u = \frac{1}{x}$ $x \rightarrow +\infty, u \rightarrow 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(\cos \frac{1}{x}) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos u)}{u} \stackrel{H}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{-\sin u}{\cos u}}{1}$

$H \Rightarrow$ règle de L'Hôpital

$= \lim_{u \rightarrow 0} -\tan u = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(\cos \frac{1}{x}) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(\cos \frac{1}{x})} = e^0 = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^x = 1$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1-\ln x}{\ln x(x-1)} \right) H = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\frac{x-1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x \ln x + x-1} \right) H = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x + 1+1} \right) = \frac{1}{\ln(0) 1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{2}$$

3)

$$x^3 + y^3 - 3\sin xy - 1 = 0 \text{ au point } (0, 1) \quad \text{Formule: } y = y'(a)(x - a) + y(a)$$

$$\frac{df(x,y)}{dx}: 3x^2 + 3y^2 y' - 3\cos(xy)(y + xy') = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3y\cos(xy) - 3xy'\cos(xy) = 0$$

$$y'(3y^2 - 3x\cos(xy)) = 3y\cos(xy) - 3x^2$$

$$y' = \frac{3y\cos(xy) - 3x^2}{3y^2 - 3x\cos(xy)} = \frac{y\cos(xy) - x^2}{y^2 - x\cos(xy)}$$

$$\text{au point } (0, 1) \quad y' = \frac{1 \times \cos(xy) - 0}{1 - 0 \times \cos(0 \times 1)} = 1$$

Donc

$$y = y'(1)(x - 0) + y(1) \Rightarrow y = 1(x - 0) + 1 \Rightarrow y = x + 1$$

Exercice 3.

$$\text{Soit } f(x) = \frac{1}{x+1}$$

Donner le développement limité d'ordre 4 de f au point 0 et déduire la série de Taylor de f en 0.

Corrigé:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

- le développement limité d'ordre 4 de f au point 0

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}, \quad f^{(3)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x+1)^5}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f''(0)}{2}(x - 0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x - 0)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x - 0)^4$$

$$f(x) = 1 - x + \frac{2}{2}x^2 - \frac{6}{3 \times 2 \times 1}x^3 + \frac{24}{4 \times 3 \times 2 \times 1}x^4 = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$$

$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^5)$$

- la série de Taylor de f en 0

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x - 0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

Exercice 4.

Trouver les intervalles de monotonie et les extrémums locaux de la fonction:

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 2$$

Corrigé:

- les intervalles de monotonie

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 2$$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 72x = 12x(x - 3)(x + 2)$$

$$12x(x - 3)(x + 2) = 0$$

$$12x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	

- les extrémums locaux

$$f(0) = 3(0)^4 - 4(0)^3 - 36(0)^2 + 2 = 2$$

$$f(3) = 3(3)^4 - 4(3)^3 - 36(3)^2 + 2 = -187$$

$$f(-2) = 3(-2)^4 - 4(-2)^3 - 36(-2)^2 + 2 = -62$$

-2 est un minimum local de f

0 est un maximum local de f

3 est un minimum local de f