

Corrigé Devoir Analyse

Exercice 1.

Calculer les limites des suites suivantes :

$$a_n = \frac{3^n + 4^n}{5^n - 2^n} \quad b_n = (-1)^n \frac{(n+1)^4}{4^n} \quad u_n = 3n + 1 - \sqrt{9n^2 + 5n + 6}$$

$$v_n = \ln(12n^3 - 1) - \ln(3n^3 + 7n^2 + 10)$$

Corrigé:

• $a_n = \frac{3^n + 4^n}{5^n - 2^n}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n - 2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3^n}{5^n} + \frac{4^n}{5^n}}{\frac{5^n}{5^n} - \frac{2^n}{5^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\frac{3}{5})^n + (\frac{4}{5})^n}{1 - (\frac{2}{5})^n} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

• $b_n = (-1)^n \frac{(n+1)^4}{4^n}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{(n+2)^4}{4^{n+1}} \times \frac{4^n}{(-1)^n (n+1)^4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)^4}{4 (n+1)^4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \times \frac{(n+2)^4}{(n+1)^4} = \frac{1}{4}$$

et comme $\frac{1}{4} < 0$ d'après TG $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$

• $u_n = 3n + 1 - \sqrt{9n^2 + 5n + 6}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n + 1 - \sqrt{9n^2 + 5n + 6} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n+1-\sqrt{9n^2+5n+6})(3n+1+\sqrt{9n^2+5n+6})}{3n+1+\sqrt{9n^2+5n+6}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n^2+6n+1-9n^2-5n-6}{3n+1+\sqrt{9n^2+5n+6}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-5}{3n+1+\sqrt{9n^2+5n+6}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1-\frac{5}{n})}{n(3+\frac{1}{n}+\sqrt{9+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}})} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

• $v_n = \ln(12n^3 - 1) - \ln(3n^3 + 7n^2 + 10)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} [\ln(12n^3 - 1) - \ln(3n^3 + 7n^2 + 10)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{12n^3 - 1}{3n^3 + 7n^2 + 10}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{12n^3}{3n^3}\right) = \ln\left(\frac{12}{3}\right) = \ln(4) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ln(4)$$

Exercice 2.

Montrer, à partir de la définition de limite, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2}{5+2n^2} = 2$

Corrigé:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2}{5+2n^2} = 2$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \left| \frac{4n^2}{5+2n^2} - 2 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{4n^2}{5+2n^2} - 2 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{4n^2 - 10 - 4n^2}{5+2n^2} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{-10}{5+2n^2} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{10}{5+2n^2} < \varepsilon \Rightarrow 10 < 5\varepsilon + \varepsilon 2n^2$$

$$\frac{10-5\varepsilon}{2\varepsilon} < n^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{10-5\varepsilon}{2\varepsilon}} < n$$

$$\text{il suffit de prendre : } N_\varepsilon = \left[\sqrt{\frac{10-5\varepsilon}{2\varepsilon}} \right]$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \left| \frac{4n^2}{5+2n^2} - 2 \right| < \varepsilon, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2}{5+2n^2} = 2$$

Exercice 3.

Soit $\{u_n\}$ la suite réelle définie par : $u_1 = 2$, $u_{n+1} = \frac{(u_n)^2 + 3}{4}$

- 1) Calculer u_2 et u_3
- 2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $1 \leq u_n \leq 2$
- 3) Montrer que $\{u_n\}$ est monotone
- 4) En déduire que $\{u_n\}$ converge et déterminer sa limite.

Corrigé:

$$\text{On a } u_1 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{(u_n)^2 + 3}{4}$$

1)

$$\bullet u_2 = \frac{(u_1)^2 + 3}{4} = \frac{4+3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\bullet u_3 = \frac{(u_2)^2 + 3}{4} = \frac{\frac{49}{16} + 3}{4} = \frac{97}{64}$$

2)

$$\text{Pour } n = 1 \quad u_1 > 1$$

$$\text{On suppose que } 1 \leq u_n \leq 2 \text{ et on montre que } 1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

$$\text{On a } 1 \leq u_n \leq 2$$

$$1 \leq (u_n)^2 \leq 4$$

$$4 \leq (u_n)^2 + 3 \leq 7$$

$$1 \leq \frac{(u_n)^2 + 3}{4} \leq \frac{7}{4} < 2$$

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$

3)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n)^2 + 3}{4} - u_n = \frac{(u_n)^2 + 3 - 4u_n}{4}$$

$$\Delta = 16 - 4 \times 3 = 4$$

$$u_{n_1} = \frac{4+2}{2} = 3, \quad u_{n_2} = \frac{4-2}{2} = 1$$

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

Donc u_n est décroissante

4)

Comme u_n est décroissante et bornée donc elle est convergente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$$

$$\frac{L^2 + 3}{4} = L \Rightarrow 4L = L^2 + 3 \Rightarrow L^2 + 3 - 4L = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \times 3 = 4$$

$$L_1 = \frac{4+2}{2} = 3(\text{rejeté}), \quad L_2 = \frac{4-2}{2} = 1(\text{accepté})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

Exercice 4.

Calculer, lorsqu'elles existent, les limites des fonctions suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{2x+5} - 3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin|x|}{x}$$

Corrigé:

1)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1} = 5$$

2)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{2x+5}-3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{x-1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{x-1}+1)(\sqrt{2x+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}{2(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5}+3}{2(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{2x+5}-3} = \frac{3}{2}$$

3)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}{(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}{(1+x^2)-(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}{x-1} = \frac{1+1}{-1} = -2\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}} = -2$$

4)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin|x|}{x} = ?$$

• Si $x < 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1$$

• Si $x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{ donc n'est pas de limite}$$