

Cours de Probabilités et Statistiques

Chapitre 1 : Calcul des probabilités

Brice DONGMEZO & Ahmed BAKAR
brice.dongmezo@esp.mr / ahmedbakar@esp.mr

Institut Supérieur du Numérique (SupNum)
Licence Professionnelle - Première Année

28 octobre 2025

Objectifs du Cours

Objectif principal : Donner les outils de probabilités et de statistiques aux élèves ingénieurs afin qu'ils puissent appréhender et résoudre les problèmes dans leur domaine d'expertise qui se caractérisent par des phénomènes aléatoires.

Plus spécifiquement :

- ❶ Comprendre la modélisation probabiliste en espace discret et continu.

Objectifs du Cours

Objectif principal : Donner les outils de probabilités et de statistiques aux élèves ingénieurs afin qu'ils puissent appréhender et résoudre les problèmes dans leur domaine d'expertise qui se caractérisent par des phénomènes aléatoires.

Plus spécifiquement :

- 1 Comprendre la modélisation probabiliste en espace discret et continu.
- 2 Résoudre les problèmes dans leur domaine d'expertise impliquant des variables aléatoires.

Objectifs du Cours

Objectif principal : Donner les outils de probabilités et de statistiques aux élèves ingénieurs afin qu'ils puissent appréhender et résoudre les problèmes dans leur domaine d'expertise qui se caractérisent par des phénomènes aléatoires.

Plus spécifiquement :

- 1 Comprendre la modélisation probabiliste en espace discret et continu.
- 2 Résoudre les problèmes dans leur domaine d'expertise impliquant des variables aléatoires.
- 3 Décrire statistiquement une population.

Objectifs du Cours

Objectif principal : Donner les outils de probabilités et de statistiques aux élèves ingénieurs afin qu'ils puissent appréhender et résoudre les problèmes dans leur domaine d'expertise qui se caractérisent par des phénomènes aléatoires.

Plus spécifiquement :

- 1 Comprendre la modélisation probabiliste en espace discret et continu.
- 2 Résoudre les problèmes dans leur domaine d'expertise impliquant des variables aléatoires.
- 3 Décrire statistiquement une population.
- 4 Estimer les paramètres d'une population statistique à partir d'un échantillon de données méticuleusement sélectionné (estimation ponctuelle et par intervalle de confiance).

Contenu du Programme

Le programme se décline en 04 chapitres : 02 en probabilités (chap 1 et 2) et 02 en statistiques (chap 3 et 4) :

- **Chapitre 1** : Calcul des probabilités. (2 séances)
- **Chapitre 2** : Variables aléatoires. (2 séances)
- **Chapitre 3** : Statistique descriptive uni-variée. (2 séances)
- **Chapitre 4** : Échantillonnage, estimation et tests. (2 séances)

Pré-requis : Analyse mathématique, Algèbre et Théorie des ensembles.

Volume horaire : Vol total 24h soit 12h CM et 12h TD

Plan du chapitre

- 1 Analyse combinatoire
 - Principes de dénombrement
 - Outils de dénombrement

- 2 Notion de probabilité
 - Vocabulaire probabiliste
 - Probabilité en cardinalité finie
 - Probabilité en général

- 3 Conditionnement et indépendance
 - Probabilité conditionnelle
 - Probabilités Bayésiennes

Analyse combinatoire

Les instruments

Parmi les instruments utiles au dénombrement, on distingue principalement :

- Le **tableau** : deux entrées maximum (on lance deux pièces ou deux dés, combien de résultats possible dans chaque cas?).

Les instruments

Parmi les instruments utiles au dénombrement, on distingue principalement :

- Le **tableau** : deux entrées maximum (on lance deux pièces ou deux dés, combien de résultats possible dans chaque cas?).
- La **liste** : énumérer systématiquement les résultats d'une expérience (Combien de mots de trois lettres peut on former avec A, B et C?).

Les instruments

Parmi les instruments utiles au dénombrement, on distingue principalement :

- Le **tableau** : deux entrées maximum (on lance deux pièces ou deux dés, combien de résultats possible dans chaque cas?).
- La **liste** : énumérer systématiquement les résultats d'une expérience (Combien de mots de trois lettres peut on former avec A, B et C?).
- L'**arbre de classement** : représenter les possibilités d'une expérience sous forme d'arbre (même question que précédemment, utiliser un arbre).

Les instruments

Parmi les instruments utiles au dénombrement, on distingue principalement :

- Le **tableau** : deux entrées maximum (on lance deux pièces ou deux dés, combien de résultats possible dans chaque cas?).
- La **liste** : énumérer systématiquement les résultats d'une expérience (Combien de mots de trois lettres peut on former avec A, B et C?).
- L'**arbre de classement** : représenter les possibilités d'une expérience sous forme d'arbre (même question que précédemment, utiliser un arbre).
- La **notation factorielle** : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $n! = n \times (n - 1) \times \cdots \times 2 \times 1$.

Les principes

Trois principes de base :

- **Principe de décomposition ou de multiplicité** : Si une expérience globale peut se décomposer en k épreuves élémentaires successives, ces dernières pouvant s'effectuer respectivement chacune de $n_1, n_2, \dots, n_k$ manières (l'épreuve au rang i peut s'effectuer de n_i façons ou produire n_i résultats possibles), alors l'expérience globale peut se faire de $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ manières différentes au total.

Les principes

Trois principes de base :

- **Principe de décomposition ou de multiplicité** : Si une expérience globale peut se décomposer en k épreuves élémentaires successives, ces dernières pouvant s'effectuer respectivement chacune de $n_1, n_2, \dots, n_k$ manières (l'épreuve au rang i peut s'effectuer de n_i façons ou produire n_i résultats possibles), alors l'expérience globale peut se faire de $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ manières différentes au total.
- **Principe des tiroirs** : Plus généralement, si vous avez n « tiroirs » à disposition pour y ranger $n + k$ « objets », alors certains « tiroirs » contiendront plus d'un « objet ».

Les principes

Trois principes de base :

- **Principe de décomposition ou de multiplicité** : Si une expérience globale peut se décomposer en k épreuves élémentaires successives, ces dernières pouvant s'effectuer respectivement chacune de $n_1, n_2, \dots, n_k$ manières (l'épreuve au rang i peut s'effectuer de n_i façons ou produire n_i résultats possibles), alors l'expérience globale peut se faire de $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ manières différentes au total.
- **Principe des tiroirs** : Plus généralement, si vous avez n « tiroirs » à disposition pour y ranger $n + k$ « objets », alors certains « tiroirs » contiendront plus d'un « objet ».
- **Principe des partitions** : Dénombrer les éléments d'un ensemble Ω quelconque revient à déterminer une partition de Ω tel qu'il soit plus aisé de dénombrer chaque élément de cette partition.

Permutations

Permutations simples

Si on classe **dans un ordre particulier** n éléments distincts, on forme une permutation simple de ces n éléments. Le nombre total de permutations simple dans un ensemble à n éléments distincts est $P_n = n!$.

Permutations avec répétition

Si on classe **dans un ordre particulier**, n éléments dont n_1 sont de type 1, n_2 sont de type 2, ..., n_k sont de type k on forme une permutation avec répétitions de ces n éléments (on a nécessairement $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$). Le nombre total de permutations simple dans un ensemble à n éléments non distincts est

$$\overline{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{P_n}{p_{n_1} \cdot p_{n_2} \cdot \dots \cdot p_{n_k}} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Combien d'anagrammes pour "TEMPS" ? $R=120$ Et pour "ERREUR" ? $R=60$

Arrangements

Arrangements simples

Si parmi n éléments distincts, on choisit p éléments **distincts** ($p \leq n$) en les classant **dans un ordre particulier**, on forme un arrangement simple de p éléments choisis parmi n . Le nombre total d'arrangements simples de p éléments pris parmi n éléments distincts est $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Arrangements avec répétition

Si parmi n éléments distincts, on choisit p éléments **distincts ou non** (on peut choisir plusieurs fois le même) en les classant **dans un ordre particulier**, on forme un arrangement avec répétitions de p éléments choisis parmi n . Le nombre total d'arrangements avec répétition de p éléments pris parmi n éléments est $\overline{A}_n^p = n^p$.

Combien de mots de 3 lettres on forme avec "TEMPS" sans répétition ? ($R=60$) et avec répétition ? ($R=125$)

Combinaisons

Combinaisons simples

Si parmi n éléments distincts, on choisit p éléments distincts ($p \leq n$) sans les classer dans un ordre particulier, on forme une combinaison simple de p éléments choisis parmi n . Le nombre total de combinaisons simples de p éléments pris parmi n est $C_n^p = \frac{A_n^p}{P_p} = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}$.

Combinaisons avec répétitions

Si parmi n éléments distincts, on choisit p éléments non nécessairement distincts ($p \leq n$) sans les classer dans un ordre particulier, on forme une combinaison avec répétition de p éléments choisis parmi n . Le nombre total de combinaisons avec répétitions de p éléments pris parmi n est $K_n^p = C_{n+p-1}^p$.

- Combien de parties à 3 éléments on forme avec les lettres du mot "TEMPS" ?
- Muni de 5 « bons pour une boisson », vous allez les chercher à restaurant qui propose 8 sortes de jus. Combien de plateaux de jus différents pouvez-vous ramener ?

Notion de probabilité

Définitions

- Une **expérience** est dite **aléatoire** ou **stochastique** s'il est impossible de prévoir son résultat. Exple : (i) Lancé d'un dé ; (ii) Tirage dans un jeu de carte.

Définitions

- Une **expérience** est dite **aléatoire** ou **stochastique** s'il est impossible de prévoir son résultat. Exple : (i) Lancé d'un dé ; (ii) Tirage dans un jeu de carte.
- L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire noté en général Ω est appelé **univers** ou **espace des résultats possibles** de cette expérience. Exple : (i) $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$; (ii) $\Omega = \{C_1, C_2, \dots, C_{54}\}$.

Définitions

- Une **expérience** est dite **aléatoire** ou **stochastique** s'il est impossible de prévoir son résultat. Exple : (i) Lancé d'un dé ; (ii) Tirage dans un jeu de carte.
- L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire noté en général Ω est appelé **univers** ou **espace des résultats possibles** de cette expérience. Exple : (i) $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$; (ii) $\Omega = \{C_1, C_2, \dots, C_{54}\}$.
- Le **cardinal** de Ω est le nombre de résultats possible de l'expérience aléatoire. Exple : (i) $Card(\Omega) = 6$; (ii) $Card(\Omega) = 54$.

Définitions

- Une **expérience** est dite **aléatoire** ou **stochastique** s'il est impossible de prévoir son résultat. Exple : (i) Lancé d'un dé ; (ii) Tirage dans un jeu de carte.
- L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire noté en général Ω est appelé **univers** ou **espace des résultats possibles** de cette expérience. Exple : (i) $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$; (ii) $\Omega = \{C_1, C_2, \dots, C_{54}\}$.
- Le **cardinal** de Ω est le nombre de résultats possible de l'expérience aléatoire. Exple : (i) $Card(\Omega) = 6$; (ii) $Card(\Omega) = 54$.
- On appelle **événement** tout sous-ensemble de Ω . Un événement qui contient un unique élément de Ω est un **événement élémentaire**. Exple : (i) Obtenir un nombre pair, Obtenir "3" ; (ii) Obtenir un as, Obtenir la reine de coeur.

Définitions

- Une **expérience** est dite **aléatoire** ou **stochastique** s'il est impossible de prévoir son résultat. Exple : (i) Lancé d'un dé ; (ii) Tirage dans un jeu de carte.
- L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire noté en général Ω est appelé **univers** ou **espace des résultats possibles** de cette expérience. Exple : (i) $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$; (ii) $\Omega = \{C_1, C_2, \dots, C_{54}\}$.
- Le **cardinal** de Ω est le nombre de résultats possible de l'expérience aléatoire. Exple : (i) $Card(\Omega) = 6$; (ii) $Card(\Omega) = 54$.
- On appelle **événement** tout sous-ensemble de Ω . Un événement qui contient un unique élément de Ω est un **événement élémentaire**. Exple : (i) Obtenir un nombre pair, Obtenir "3" ; (ii) Obtenir un as, Obtenir la reine de coeur.
- Ω c'est l'**évènement certain** et $\emptyset$ c'est l'**évènement impossible**.

Définitions

- Une **expérience** est dite **aléatoire** ou **stochastique** s'il est impossible de prévoir son résultat. Exple : (i) Lancé d'un dé ; (ii) Tirage dans un jeu de carte.
- L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire noté en général Ω est appelé **univers** ou **espace des résultats possibles** de cette expérience. Exple : (i) $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$; (ii) $\Omega = \{C_1, C_2, \dots, C_{54}\}$.
- Le **cardinal** de Ω est le nombre de résultats possible de l'expérience aléatoire. Exple : (i) $Card(\Omega) = 6$; (ii) $Card(\Omega) = 54$.
- On appelle **événement** tout sous-ensemble de Ω . Un événement qui contient un unique élément de Ω est un **événement élémentaire**. Exple : (i) Obtenir un nombre pair, Obtenir "3" ; (ii) Obtenir un as, Obtenir la reine de coeur.
- Ω c'est l'**événement certain** et $\emptyset$ c'est l'**événement impossible**.
- Si A et B sont des événements, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\overline{A}$ (événement contraire de A) sont tous des événements.

Définitions

- Une **expérience** est dite **aléatoire** ou **stochastique** s'il est impossible de prévoir son résultat. Exple : (i) Lancé d'un dé ; (ii) Tirage dans un jeu de carte.
- L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire noté en général Ω est appelé **univers** ou **espace des résultats possibles** de cette expérience. Exple : (i) $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$; (ii) $\Omega = \{C_1, C_2, \dots, C_{54}\}$.
- Le **cardinal** de Ω est le nombre de résultats possible de l'expérience aléatoire. Exple : (i) $Card(\Omega) = 6$; (ii) $Card(\Omega) = 54$.
- On appelle **événement** tout sous-ensemble de Ω . Un événement qui contient un unique élément de Ω est un **événement élémentaire**. Exple : (i) Obtenir un nombre pair, Obtenir "3" ; (ii) Obtenir un as, Obtenir la reine de coeur.
- Ω c'est l'**évènement certain** et $\emptyset$ c'est l'**évènement impossible**.
- Si A et B sont des évènements, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\overline{A}$ (évènement contraire de A) sont tous des évènements.
- Par exemple, $A \cup B$ se lis : "les évènements A ou B se réalisent"

Définitions et exemple

Définition (Équiprobabilité)

Intuitivement, on parle d'équiprobabilité lors d'une expérience aléatoire lorsqu'il n'y a aucune chance qu'un évènement élémentaire se produise plus qu'un autre.

Définition (Probabilité d'un évènement)

*Soit Ω un univers de cardinalité finie, dont les évènements élémentaires sont équiprobables. Soit A un évènement de Ω . **La probabilité que A se réalise** notée $\mathcal{P}(A)$ est définie par la quantité : $\mathcal{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{N'}{N}$ Avec N' le nombre de cas favorables et N le nombre de cas possibles.*

Exemple

Une urne contient une boule blanche (1B) et une boule noire (1N). On fait deux tirages avec remise. Calculer la probabilité d'avoir deux boules noires lors du tirage.
Solution : $\Omega = \{(B, B), (B, N), (N, B), (N, N)\}$, $A = \{(N, N)\}$. On a $\text{Card}(\Omega) = 4$ et $\text{Card}(A) = 1$ par conséquent $\mathcal{P}(A) = \frac{1}{4} = 0,25$.

Propriétés

Proposition

Soit Ω un univers donné, et soit A et B deux évènements de Ω (éléments inclus dans Ω , $\wp(\Omega)$) on a :

- ❶ $\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(\bar{A}) = 1$
- ❷ $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B)$
- ❸ $A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \leq \mathcal{P}(B)$

Preuve : Devoir de maison.

Exercice : Dans une entreprise qui compte 400 personnes, 300 personnes sont assurées contre la maladie, 160 contre les accidents et 120 à la fois contre la maladie et les accidents. Illustrer le problème à l'aide d'un dessin ensembliste.

En utilisant les notations ensemblistes et les théorèmes étudiés précédemment, déterminer la probabilité en % qu'une personne choisie au hasard dans l'entreprise soit assurée : (i) contre la maladie, mais pas contre les accidents ? (ii) contre la maladie ou (non exclusif) les accidents ? (iii) ni contre la maladie, ni contre les accidents ?

Définitions

Définition (Tribu)

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, on appelle **Tribu** ou **Sigma – algèbre** toute famille $\mathcal{F}$ de parties de Ω satisfaisant les propriétés suivantes :

- (i) $\Omega \in \mathcal{F}$
- (ii) Si $A \in \mathcal{F}$ alors $\overline{A} \in \mathcal{F}$ (stable pour le complémentaire)
- (iii) Si $(A_i)_{i \in I}$, $I \subset \mathbb{N}$, est une famille dénombrable d'évènement appartenant à $\mathcal{F}$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$ (stable pour les réunions dénombrables).

Exemple : On montre que $\wp(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω est une tribu sur Ω .

Définition (Espace probabilisable)

Si on considère Ω l'univers associé à une expérience aléatoire et une tribu $\mathcal{F}$ sur Ω alors le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est appelé **espace probabilisable**. Autrement dit un espace sur lequel on peut définir une probabilité.

Définition

Définition (Probabilité)

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable, on appelle **probabilité** ou **mesure de probabilité** sur une tribu l'application $\mathcal{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ qui vérifie :

- $\mathcal{P}(\Omega) = 1$
- Pour toute famille finie ou infinie dénombrable $(A_i)_{i \in I}$ d'évènements deux à deux incompatibles ($A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$), on a :
$$\mathcal{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathcal{P}(A_i)$$

Définition (Espace probabilisé)

Si on considère Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, une tribu $\mathcal{F}$ sur Ω et une probabilité $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{F}$ alors le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ composé de l'espace probabilisable et de la mesure de probabilité est un **espace probabilisé**. Autrement dit un espace sur lequel on a défini une probabilité.

Propriétés

Proposition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé, A et B deux évènements de $\mathcal{F}$, on a :

- $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(\bar{A}) = 1$
- $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B)$
- $\mathcal{P}(A \cup B) \leq \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$
- $A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \leq \mathcal{P}(B)$

Preuve : Devoir de maison

Exercice : Définir le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ pour chacune des expériences aléatoires ci-dessous :

- 1 Lancé d'une pièce de monnaie deux fois successivement ;
- 2 Lancé d'un dé non pipé ;
- 3 Lancé d'un dé et d'une pièce simultanément.

Conditionnement et indépendance

Définitions

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé, soit A et B deux évènements de Ω tels que $\mathcal{P}(B) \neq 0$. La probabilité que l'évènement A se réalise sachant que B s'est produit est appelé **la probabilité conditionnelle de A sachant B** et est noté $\mathcal{P}(A|B)$.

Elle se calcule comme suit : $\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}$.

$\mathcal{P}(A|B)$ exprime la probabilité de réalisation de A quand on sait que B s'est déjà réalisé. On dit couramment « la probabilité de A sachant B ».

Exemple / Exercice : On extrait une carte dans un jeu de 32 cartes. (i) Quelle est la probabilité d'obtenir un roi ? (ii) Quelle est la probabilité d'obtenir roi sachant qu'on a tiré un carreau ? (i-4/32 ; ii-1/32)

Exemple / exercice : On jette un dé à 6 faces non truqué, on définit les évènements : $A = \text{"Obtenir un deux"}$ et $B = \text{"Obtenir un nombre pair"}$. Calculez $\mathcal{P}(A|B)$ et $\mathcal{P}(B|A)$.

Propriétés

Proposition

Soit A et B deux évènements de probabilité non nulle sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, alors on a :

- ❶ Si A et B sont incompatibles ($A \cap B = \emptyset$) alors $\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)} = 0$
- ❷ Si $A \subset B$ alors $\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)} = \frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(B)}$
- ❸ Si $B \subset A$ alors $\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)} = \frac{\mathcal{P}(B)}{\mathcal{P}(B)} = 1$

Théorème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé, soit A appartenant à $\mathcal{F}$ tel que $\mathcal{P}(A) > 0$ alors l'application : $\mathcal{P}|_A = \mathcal{P}(\cdot|A) : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$
 $B \mapsto \mathcal{P}(B|A)$

[Preuve devoir de maison].

On jette un dé à 6 faces non truqué, on définit les évènements : $A = \text{"Obtenir un deux"}$ et $B = \text{"Obtenir un nombre pair"}$, calculez $\mathcal{P}(\bar{A}|B)$ de deux façons différentes.

Indépendance des évènements

Définition (Indépendance)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé, soit A et B deux évènements de probabilité non nulle. On dit que A et B sont indépendants ssi $\mathcal{P}(B|A) = \mathcal{P}(B)$ ou $\mathcal{P}(A|B) = \mathcal{P}(A)$.

Autrement dit $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B)$.

Caractérisation : A et B sont indépendants si et seulement si $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B)$.

Proposition

Soit A et B deux évènements indépendant sur un espace probabilisé, alors :

- A et $\overline{B}$ sont indépendants.
- $\overline{A}$ et B sont indépendants.
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Preuve : Devoir de maison/Exercice

Préliminaires

Proposition (Formule des probabilités composées)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé, soit A et B deux évènements de probabilité non nulle, alors on a : $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$ et $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$

Définition (Système complet d'évènements)

Soit $(B_i)_{i=1,\dots,n}$ une famille d'évènements de $\mathcal{F}$. On dit que $(B_i)_{i=1,\dots,n}$ forme un **système complet d'évènements** si elle vérifie : $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$, et $B_i \cap B_j = \emptyset$, pour $i \neq j$ avec $\mathcal{P}(B_i) > 0 \forall i$.

Proposition (Formule des probabilités totales)

Pour tout $A \in \mathcal{F}$, on a la formule suivante dite des probabilité totales :

$$\mathcal{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}(A|B_i)P(B_i) \text{ où } (B_i)_{i=1,\dots,n} \text{ est un système complet d'évènements.}$$

Formule de Bayes

Soit A un évènement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$,

Soit $(B_i)_{i=1, \dots, n}$ est un système complet d'évènements sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$,

On définit la probabilité de l'évènement $B_i | A$ par la formule ci dessous dite

Formule de Bayes :

$$\mathcal{P}(B_i | A) = \frac{\mathcal{P}(B_i) \cdot \mathcal{P}(A | B_i)}{\sum_{i=1}^n \mathcal{P}(A | B_i) \mathcal{P}(B_i)}$$

Preuve : en cours (***FIN CHAPITRE***)

Exercice d'application : Dans une entreprise :

10% des employés ont fait des études supérieures ($\mathcal{P}(S)$) ;

70% de ceux qui ont fait des études supérieures occupent un poste administratif ($\mathcal{P}(A/S)$) ;

20% de ceux qui n'ont pas fait d'études supérieures occupent un poste administratif ($\mathcal{P}(A/\bar{S})$).

- ❶ On choisit au hasard un employé. Quelle est la probabilité (en %) qu'il occupe un poste administratif ?
- ❷ On choisit au hasard un employé. Quelle est la probabilité (en %) qu'il occupe un poste administratif sachant qu'il a fait des études supérieures ?
- ❸ On choisit au hasard un employé. Quelle est la probabilité (en %) qu'il ait fait des études supérieures sachant qu'il occupe un poste administratif ?