

Corrigé de Devoir Algèbre**Exercice 1**

Dites si les formules suivantes sont des tautologies, en justifiant votre réponse.

i. $P \vee \bar{P}$ (principe du tiers exclu)

ii. $\overline{P \wedge \bar{P}}$ (principe de non-contradiction)

iii. $\bar{P} \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ (le faux implique tout)

Corrigé:

i. $P \vee \bar{P}$

P	$\bar{P}$	$P \vee \bar{P}$
V	F	V
V	F	V
F	V	V
F	V	V

Donc la formule est toujours vraie(tautologies)

ii. $\overline{P \wedge \bar{P}}$

P	$\bar{P}$	$P \wedge \bar{P}$	$\overline{P \wedge \bar{P}}$
V	F	F	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	V	F	V

Donc la formule est toujours vraie(tautologies)

iii. $\bar{P} \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$

P	Q	$\bar{P}$	$P \Rightarrow Q$	$\bar{P} \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Donc la formule est toujours vraie(tautologies)

Exercice 2

I.

Soient f l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même définie par :

$$f(1) = 4; f(2) = 1; f(3) = 2; f(4) = 2$$

1. Déterminer $f^{-1}(A)$; lorsque $A = \{2\}$, $A = \{1, 2\}$, $A = \{3\}$

2. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ? Justifier.

II.

Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F et A et B deux parties de E ,
montrer que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Corrigé:

I.

1.

- $A = \{2\}$

$$f^{-1}(A) = \{3, 4\}$$

Car $A = \{2\}$ est l'ensemble des images réciproque de $\{1, 2, 3, 4\}$ dans l'ensemble de départ

x éléments, $f(x) = 2$ c'est-à-dire $f(x) \in A$

dans ce cas on a $f(3) = 2$; $f(4) = 2$

- $A = \{1, 2\}$

$$f^{-1}(A) = \{2, 3, 4\}$$

Car $A = \{2\}$ est l'ensemble des images réciproque de $\{1, 2, 3, 4\}$ dans l'ensemble de départ

x éléments, $f(x) = 2$ ou $f(x) = 1$ c'est-à-dire $f(x) \in A$

dans ce cas on a $f(3) = 2$; $f(4) = 2$; $f(2) = 1$

- $A = \{3\}$

$$f^{-1}(A) = \emptyset$$

Car $A = \{2\}$ est l'ensemble des images réciproque de $\{1, 2, 3, 4\}$ dans l'ensemble de départ

x éléments, $f(x) = 3$ c'est-à-dire $f(x) \in A$

aucun éléments n'a pour image 3

2.

- injective

f est injective si $x_1, x_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

ici on a $f(3) = 2$; $f(4) = 2$ mais $3 \neq 4$

donc f n'est pas injective

- surjective

f est surjective si chaque élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent

l'élément 3 n'a pas d'antécédent

donc f n'est pas surjective

- bijective

f est bijective si est injective et surjective

comme f n'est ni injective ni surjective, elle n'est pas bijective

II.

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

Soit $y \in f(A \cup B)$ on a :

$$\begin{aligned} y &\in f(A \cup B) \\ \Leftrightarrow \exists x \in A \cup B, \text{ tel que } y &= f(x) \\ \Leftrightarrow \exists x \in A \text{ ou } \exists x \in B \\ \Leftrightarrow f(x) &\in f(A) \text{ ou } f(x) \in f(B) \\ \Leftrightarrow y &\in f(A) \text{ ou } y \in f(B) \\ \Leftrightarrow y &\in f(A) \cup f(B) \end{aligned}$$

Conclusion. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Exercice 3

On définit sur R^2 la relation R par: $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

1. Montrer que R une relation d'équivalence.

2. Décrire la classe d'équivalence du couple (a, b) .

Corrigé:

1.

• Réflexive: $\forall (a, b) \in R^2, (a, b)R(a, b)$

$$(a, b)R(a, b) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = a^2 + b^2$$

Donc R est Réflexive

• Transitive: $\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in R^2$, Si $[(a, b)R(c, d) \text{ et } (c, d)R(e, f)] \Rightarrow (a, b)R(e, f)$
on a:

$$(a, b)R(c, d) \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

$$(c, d)R(e, f) \Rightarrow c^2 + d^2 = e^2 + f^2$$

$$\text{alors: } a^2 + b^2 = e^2 + f^2 \Rightarrow (a, b)R(e, f)$$

Donc R est Transitive

• Symétrique: $\forall (a, b), (c, d) \in R$, Si $(a, b)R(c, d) \Rightarrow (c, d)R(a, b)$

$$(a, b)R(c, d) \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

$$\Rightarrow c^2 + d^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow (c, d)R(a, b)$$

Donc R est Symétrique

la relation R est Réflexive, Transitive et Symétrique

Donc R est une relation d'équivalence

2.

$$\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in R^2 / (x, y)R(a, b)\}$$

$$(x, y)R(a, b) \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

$$\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 = a^2 + b^2\}$$

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \text{ c'est cercle de centre } (0,0) \text{ et de rayon } (\sqrt{a^2 + b^2})$$