

Corrigé Devoir Analyse

Exercice 1.

Soit $\{u_n\}$ la suite de nombres réels définie par un $u_n = \frac{n}{2^n}$, $\forall n \geq 1$

1) Étudier la monotonie de $\{u_n\}$ $n \geq 1$. Que peut-on conclure?

2) On définit la suite $\{v_n\}$ $n \geq 1$ par $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$, $\forall n \geq 1$

Montrer, à partir de la définition de limite, que $\{v_n\}$ converge vers

3) En déduire que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n_0 \geq n$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{3}{4}$

4) Calculer la limite de $\{u_n\}$

Corrigé:

1)

$$u_n = \frac{n}{2^n}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{2^n n + 2^n - n 2^{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{-2n 2^n + 2^n n + 2^n}{2^{n+1}} = \frac{2^n - n 2^n}{2^n 2^{n+1}} = \frac{2^n (1-n)}{2^n 2^{n+1}} \\ &= \frac{1-n}{2^{n+1}} \quad \text{or } n \geq 1 \Rightarrow n-1 \leq 0 \end{aligned}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1-n}{2^{n+1}} \leq 0$$

$$u_{n+1} - u_n \leq 0, \forall n \geq 1$$

Donc (u_n) est décroissante

2)

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{2^n (n+1)}{n 2^{n+1}} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \text{ on a } \left| v_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{n+1-n}{2n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{2n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon}$$

il suffit de prendre : $N_0 = \left[\frac{1}{2\varepsilon} \right]$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \text{ on a } \left| v_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \text{ et par suite } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$$

3)

On a que $\forall \varepsilon > 0, n \geq \left[\frac{1}{2\varepsilon} \right]$

$$\left| v_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{1}{2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < \varepsilon + \frac{1}{2} \quad \text{on pose } \varepsilon = \frac{1}{4} \Rightarrow N_0 = \left[\frac{1}{2(\frac{1}{4})} \right] = 2$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4}, \forall n \geq 2$$

4)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

(u_n) est convergente vers 0 d'après le critère de d'Alembert

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Exercice 2.

1) Calculer les limites des suites suivantes :

$$a_n = \frac{3n^2 + 4n \sin(n^3 + 1)}{5 + n^2}; \quad b_n = 5n - \sqrt{25n^2 - 5n + 6}$$

2) Montrer que les suites de termes généraux $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ sont adjacentes:

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Corrigé:

1)

$$\bullet a_n = \frac{3n^2 + 4n \sin(n^3 + 1)}{5 + n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + 4n \sin(n^3 + 1)}{5 + n^2}$$

$$\text{On a: } -1 \leq \sin(n^3 + 1) \leq 1$$

$$-4n \leq 4n \sin(n^3 + 1) \leq 4n$$

$$3n^2 - 4n \leq 3n^2 + 4n \sin(n^3 + 1) \leq 3n^2 + 4n$$

$$\frac{3n^2 - 4n}{5 + n^2} \leq \frac{3n^2 + 4n \sin(n^3 + 1)}{5 + n^2} \leq \frac{3n^2 + 4n}{5 + n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 4n}{5 + n^2} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + 4n}{5 + n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2}{n^2} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2}{n^2}$$

$$3 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq 3$$

$$\text{D'après théorème des gendarmes } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 3$$

$$\bullet b_n = 5n - \sqrt{25n^2 - 5n + 6}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 5n - \sqrt{25n^2 - 5n + 6} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(5n - \sqrt{25n^2 - 5n + 6})(5n + \sqrt{25n^2 - 5n + 6})}{5n + \sqrt{25n^2 - 5n + 6}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(5n - \sqrt{25n^2 - 5n + 6})(5n + \sqrt{25n^2 - 5n + 6})}{5n + \sqrt{25n^2 - 5n + 6}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{25n^2 + 5n - 6 - 25n^2}{5n + \sqrt{25n^2 - 5n + 6}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n - 6}{5n + \sqrt{25n^2 - 5n + 6}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(5 - \frac{6}{n})}{n(5 + \sqrt{25 - \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{6}{n}}{5 + \sqrt{25 - \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}}}$$

$$= \frac{5}{5+5} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b_n = \frac{1}{2}$$

2)

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

• étudions la monotone de v_n et u_n

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc (u_n) est strictement croissante

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)(n+1)^2} = \frac{-n-1}{n(n+1)(n+1)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-n-1}{n(n+1)(n+1)^2} < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc (v_n) est strictement décroissante

• Calculons la $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

comme u_n est croissante et v_n est décroissante $\Rightarrow \{u_n\}$ et $\{v_n\}$ sont adjacentes

Exercice 3.

Soit $\{u_n\}$ la suite réelle définie par : $u_1 = \frac{3}{2}$, $u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n)^2 + \frac{3}{2}$

1) Calculer u_2 , u_3 et u_4

2) Montrer que : $0 < u_n$ pour tout $n \geq 1$

3) Montrer que $u_n < 3$ pour tout $n \geq 1$

4) Montrer que la suite $\{u_n\}$ est croissante

5) En déduire que $\{u_n\}$ converge et déterminer sa limite

Corrigé:

1)

$$u_2 = \frac{1}{6}(u_1)^2 + \frac{3}{2} = \frac{9}{24} + \frac{36}{24} = \frac{45}{24}$$

$$u_3 = \frac{1}{6}(u_2)^2 + \frac{3}{2} = \frac{75}{128} + \frac{3}{2} = \frac{267}{128}$$

$$u_4 = \frac{1}{6}(u_3)^2 + \frac{3}{2} = \frac{23763}{32768} + \frac{3}{2} = \frac{72915}{32768}$$

2)

Pour $n = 1$, $u_1 = \frac{3}{2} > 0$

On suppose que $u_n > 0$ et on montre que $u_{n+1} > 0$

on a $u_n > 0$

$$u_n^2 > 0$$

$$\frac{1}{6}u_n^2 > 0$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{6}u_n^2 > \frac{3}{2} > 0$$

$$u_{n+1} > 0$$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0, n \geq 1$

3)

Pour $n = 1$, $u_1 = \frac{3}{2} < 3$

On suppose que $u_n < 3$ et on montre que $u_{n+1} < 3$

on a $u_n < 3$

$$u_n^2 < 9$$

$$\frac{1}{6}u_n^2 < \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{6}u_n^2 < \frac{3}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{6}u_n^2 < 3$$

$$u_{n+1} < 3$$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < 3, n \geq 1$

4)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{6}(u_n)^2 + \frac{3}{2} - u_n = \frac{2u_n^2 + 18 - 12u_n}{12} = \frac{u_n^2 - 6u_n + 9}{6} = \frac{(u_n - 3)^2}{6} \geq 0$$

$$u_{n+1} - u_n \geq 0, \quad \forall n \geq 1$$

Donc $\{u_n\}$ est croissante

5)

Comme $\{u_n\}$ est majorée et croissante donc $\{u_n\}$ est convergente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$$

$$L = \frac{1}{6}L^2 + \frac{3}{2} \Rightarrow L^2 - 6L + 9 = 0$$

$$(L - 3)^2 = 0 \Rightarrow L = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$$