

Corrigé TD-1: Algèbre**Exercice 1**

Soient les propositions :

Q: On est naïf; T: On est heureux; R: On est riche; U: On a de la chance; S: On est intelligent.

1) Décrire les propositions suivantes à l'aide de Q, R, S, T et U et des opérateurs logiques.

A : L'argent ne fait pas le bonheur.

B : On n'est pas nécessairement intelligent quand on est riche.

C : La chance sourit au malheureux.

D : On est naïf et stupide si et seulement si on est malheureux quand on est riche.

E : Quand on est riche et stupide, on a de la chance ou on est malheureux.

2) Formuler en français les formules suivantes :

K : $(\text{non } R \text{ ou } R) \Rightarrow (\text{non } Q \Rightarrow S)$

L : $(\text{non } S \text{ et } R) \Leftrightarrow U$

M : $\text{non}(\text{non } Q) \Rightarrow T$

N : $(\text{non } Q \text{ et } R) \text{ ou } \text{non } T$

O : $R \Rightarrow (S \text{ ou } T)$

Corrigé:

1)

A : $\overline{(R \Rightarrow T)}$

B : $\overline{(R \Rightarrow S)}$

C : $(\bar{T} \Rightarrow U)$

D : $(Q \wedge \bar{S}) \Leftrightarrow (R \Rightarrow \bar{T})$

E : $(R \wedge \bar{S}) \Rightarrow (U \vee \bar{T})$

2)

K : $(\text{non } R \text{ ou } R) \Rightarrow (\text{non } Q \Rightarrow S)$

être Riche ou être non Riche Si on est intelligent quand on n'est pas naïf

L : $(\text{non } S \text{ et } R) \Leftrightarrow U$

On est Stupide et Riche Si est quand on est de la chance

M : $\text{non}(\text{non } Q) \Rightarrow T$

être naïf implique la bonheur

N : $(\text{non } Q \text{ et } R) \text{ ou } \text{non } T$

soit on est non naïf et Riche , soit on est malheur

O : $R \Rightarrow (S \text{ ou } T)$

on est intelligent , heureux Si on est Rich

Exercice 2

Montrer que les assertions suivantes, sont des tautologies (i.e. toujours vraies).

1. $P \Leftrightarrow P$

2. $(P \wedge Q) \Rightarrow P$

3. $P \Rightarrow (P \vee Q)$

4. $P \vee (P \Rightarrow Q)$

5. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

6. $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$

Corrigé:

Tableau de vérité

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F

1. $P \Leftrightarrow P$ toujours vraie (tautologies) car $P=P$

2. $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ toujours vraie (tautologies) car

$P \wedge Q$	P	$(P \wedge Q) \Rightarrow P$
V	V	V
F	V	V
F	F	V
F	F	V

3. $P \Rightarrow (P \vee Q)$ toujours vraie (tautologies) car

P	$P \vee Q$	$P \Rightarrow (P \vee Q)$
V	V	V
V	V	V
F	V	V
F	F	V

4. $P \vee (P \Rightarrow Q)$ toujours vraie (tautologies) car

P	$P \Rightarrow Q$	$P \vee (P \Rightarrow Q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	V	V

5. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ toujours vraie (tautologies) car

P	Q	$Q \Rightarrow P$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

6. $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$ toujours vraie (tautologies) car

$P \Rightarrow Q$	P	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$	P	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P \Rightarrow P$
V	V	V	V	V
F	V	V	V	V
V	F	F	F	V
V	F	F	F	V

Exercice 3

Montrer que :

1. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \bar{P} \vee Q$

2. $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow P \wedge \bar{Q}$

3. $R \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$ avec $R = (P \wedge \bar{Q}) \vee (\bar{P} \wedge \bar{Q} \vee (P \wedge Q))$

Corrigé:

1. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \bar{P} \vee Q$

P	Q	$\bar{P}$	$P \Rightarrow Q$	$\bar{P} \vee Q$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \bar{P} \vee Q$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

2. $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow P \wedge \bar{Q}$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{(P \Rightarrow Q)}$	$\bar{Q}$	$P \wedge \bar{Q}$	$\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow P \wedge \bar{Q}$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	V

3. $R \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$ avec $R = (P \wedge \bar{Q}) \vee (\bar{P} \wedge \bar{Q} \vee (P \wedge Q))$

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$\bar{P} \wedge \bar{Q}$	$P \wedge \bar{Q}$	$P \wedge Q$	$((\bar{P} \wedge \bar{Q}) \vee (P \wedge Q))$	R	$P \Rightarrow Q$	$R \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$
V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F	F	F	F	V	F
F	F	V	V	V	F	F	V	V	V	V

Exercice 4

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.

Exprimer verbalement la signification des assertions suivantes :

1. $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = c$
2. $\forall x \in I, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
3. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$
4. $\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
5. $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Corrigé:

1. f est constante
2. f s'annule scellement en 0
3. f est surjective
4. f est croissante
5. f est injective

Exercice 5

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.

Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La fonction f s'annule.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. f n'est pas une fonction constante.
4. f ne prend jamais deux fois la même valeur.
5. la fonction f présente un minimum.
6. f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Corrigé:

1. $\exists x \in I, tq f(x) = 0$
2. $\forall x, f(x) = 0$
3. $\exists x, y \in I, tq f(x) \neq f(y)$
4. $\forall x, y \in I, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
5. $\exists x_0 \in I tq f(x_0) \leq f(x)$
6. $\exists x_0 tq f(x_0) = 0$

Exercice 6

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.

Exprimer les négations des assertions suivantes

1. $\forall x \in I, f(x) \neq 0$
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$
3. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$

4. $\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
5. $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
6. $\forall x \in I, f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$

Corrigé:

1. $\forall x \in I, f(x) \neq 0$
 $\Rightarrow \exists x \in I, f(x) = 0$
2. $\forall y \in R, \exists x \in I, f(x) = y$
 $\Rightarrow \exists y \in R, \forall x \in I, f(x) \neq y$
3. $\exists M \in R, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$
 $\Rightarrow \forall M \in R, \exists x \in I, |f(x)| > M$
4. $\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
 $\Rightarrow \exists x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) > f(y)$
5. $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
 $\Rightarrow \exists x, y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x \neq y$
6. $\forall x \in I, f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$
 $\Rightarrow \exists x \in I, f(x) > 0 \Rightarrow x > 0$

Exercice 7

En construisant un tableau de vérité, vérifier si l'équivalence est correcte :

P implique (non Q ou non R) est équivalente à (Q implique non P) ou (R implique non P)

Corrigé:

P	Q	R	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$\bar{R}$	$\bar{Q}\bar{V}\bar{R}$	$P \Rightarrow \bar{Q}\bar{V}\bar{R}$	$Q \Rightarrow \bar{P}$	$R \Rightarrow \bar{P}$	$(Q \Rightarrow \bar{P}) \vee (R \Rightarrow \bar{P})$	$(P \Rightarrow (\bar{Q}\bar{V}\bar{R})) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow \bar{P}) \vee (R \Rightarrow \bar{P})$
V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F	V
V	V	F	F	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
F	V	V	V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V

Exercice 8

Ecrire la contraposition des implication suivantes :

1. S'il gagne son pari, je mange mon chapeau.
2. Si tu es logicien dans l'âme, cet exercice n'est pas difficile pour toi.

Corrigé:

1. S'il gagne son pari, je mange mon chapeau.
 $\Rightarrow$ Si je n'ai mangé pas mon chapeau, ce qu'il n'a pas gagné son pari
2. Si tu es logicien dans l'âme, cet exercice n'est pas difficile pour toi.
 $\Rightarrow$ Si cet exercice est difficile pour toi, Alors tu n'es pas logicien dans l'âme

Exercice 9

Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut-on écrire :

a) $a \in E$; b) $a \subset E$; c) $\{a\} \subset E$; d) $\emptyset \in E$; e) $\emptyset \subset E$; f) $\{\emptyset\} \subset E$?

Corrigé:

a) $a \in E$ ✓ b) $a \subset E$ ✗ c) $\{a\} \subset E$ ✓
d) $\emptyset \in E$ ✗ e) $\emptyset \subset E$ ✓ f) $\{\emptyset\} \subset E$ ✗

Exercice 10

Etant donné A, B et C trois parties de E , justifier les équivalences suivantes :

- a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
b) $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$.
c) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$
d) $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \Leftrightarrow B = C$

Corrigé:

a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

$\Rightarrow A \subset B$

$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$

or $A \subset B$

$x \in A \text{ ou } x \in B \Rightarrow x \in B \text{ ou } x \in B$

Donc par conséquence $A \cup B = B$

$\forall x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$

d'où $A \cup B = B$

$\Rightarrow A \cup B = B$

$\forall x \in A \Rightarrow x \in A \cup B = B \Rightarrow x \in B$

d'où $A \subset B$

b) $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$

$\Rightarrow A = B$

$A \cap B = A \text{ et } A \cup B = B$

$A \cap B = A \cup B$

$\Rightarrow A \cap B = A \cup B$

$\forall n \in A \Rightarrow n \in A \cup B = A \cap B \Rightarrow n \in B \Rightarrow A \subset B$

$\forall n \in B \Rightarrow n \in A \cup B = A \cap B \Rightarrow n \in A \Rightarrow B \subset A$

c) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$

Supposons

$A \cup B = A \cap C$

Mq

$B \subset A \text{ et } A \subset C$

$B \subset A$?

$n \in B \Rightarrow n \in A \cup B$

$\Rightarrow n \in A \cap C$

$\Rightarrow n \in A \Rightarrow B \subset A \quad (1)$

$A \subset C$?

$n \in A \Rightarrow n \in A \cup B$

$\Rightarrow n \in A \cap C$

$\Rightarrow n \in C \Rightarrow A \subset C \quad (2)$

d'après: (1) et (2)

$$A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$$

d)

$$B \subseteq C$$

on suppose que $x \in B$

$$\cdot \text{ Si } x \in A, x \in A \cap B, A \cap B = A \cap C \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in C$$

$$\cdot \text{ Si } x \notin A, x \in B \Rightarrow x \in A \cup B, A \cup B = A \cup C$$

Donc $x \in A \cup C$ et comme $x \notin A$ alors $x \in C$

$$\text{Donc } x \in C \Rightarrow B \subset C$$

$$C \subseteq B$$

on suppose que $x \in C$

$$\cdot \text{ Si } x \in A, x \in A \cap C, \text{ or: } A \cap C = A \cap B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in B$$

$$\cdot \text{ Si } x \notin A, x \in A \cup C, \text{ or: } A \cup C = A \cup B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in B$$

$$\text{Donc } x \in B \Rightarrow C \subset B$$

$$\text{D'où } B \subset C \text{ et } C \subset B \Rightarrow B = C$$

Donc

$$A \cap C = A \cap B; A \cup C = A \cup B \Rightarrow B = C$$

$$\Leftrightarrow B = C \text{ alors } A \cap C = A \cap B; A \cup C = A \cup B$$

car C et B sont égaux

Exercice 11

Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Etablir $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Corrigé:

$$x \in A \setminus (B \cap C) \Rightarrow x \in A \cap \overline{(B \cap C)}$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C})$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$\text{Donc } A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Exercice 12

Soient A et B deux parties de E , on appelle différence symétrique de A et B , l'ensemble :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \text{ Montrer que } A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Corrigé:

$$\text{on a } A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$= (x \in A \wedge x \notin B) \cup (x \in B \wedge x \notin A)$$

$$= (x \in A \wedge x \in C_E B) \cup (x \in B \wedge x \in C_E A)$$

$$= (x \in A \cap C_E B) \cup (x \in B \cap C_E A)$$

$$= (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A) = D \cup (B \cap C_E A) \text{ avec } D = (A \cap C_E B)$$

$$(D \cup B) \cap (D \cup C_E A)$$

$$= [(A \cap C_E B) \cup B] \cup [(A \cap C_E B) \cup C_E A]$$

$$= [(A \cup B) \cap (C_E B \cup B)] \cup [(A \cup C_E A) \cap (C_E B \cup C_E A)]$$

$$= [(A \cup B) \cap E] \cup [E \cap (C_E B \cup C_E A)]$$

$$= (A \cup B) \cap (C_E A \cup C_E B) = (A \cup B) \cap C_E (A \cap B)$$

$$\text{Conclusion} = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Exercice 13

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Etablir : $\forall A \in P(E), A \subset f^{-1}(f(A))$ et $\forall B \in P(F), f(f^{-1}(B)) \subset B$

Corrigé:

- $\forall A \in P(E), A \subset f^{-1}(f(A))$

Soit $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$

$$\Rightarrow f^{-1}(f(x)) \in f^{-1}(f(A))$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$$

D'où $A \subset f^{-1}(f(A))$

- $\forall B \in P(F), f(f^{-1}(B)) \subset B$

Soit $y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(B)$ avec $y = f(x)$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(B)$$

$$\Rightarrow f(x) \in f(f^{-1}(B))$$

$$\Rightarrow f(x) \in B$$

$$\Rightarrow y \in B$$

D'où $f(f^{-1}(B)) \subset B$

Exercice 14

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

a) Montrer que : $\forall A, A' \in P(E), f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ et $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.

b) Montrer que : $\forall B, B' \in P(F), f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

et $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

Corrigé:

a.

- $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$

Soit $y \in F$ on a :

$$y \in f(A \cup A')$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in A \cup A', \text{ tel que } y = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in A \text{ ou } \exists x \in A'$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in f(A) \text{ ou } f(x) \in f(A')$$

$$\Leftrightarrow y \in f(A) \text{ ou } y \in f(A')$$

$$\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(A')$$

Conclusion. $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$

- $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$

Soit $y \in F$ on a :

$$y \in f(A \cap A')$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in A \cap A', \text{ tel que } y = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in A \text{ et } \exists x \in A'$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in f(A) \text{ et } f(x) \in f(A')$$

$$\Leftrightarrow y \in f(A) \text{ et } y \in f(A')$$

$$\Leftrightarrow y \in f(A) \cap f(A')$$

Conclusion. $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$

b.

- $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

Soit $x \in E$ on a :

$$\begin{aligned}
x &\in f^{-1}(B \cup B') \\
&\Leftrightarrow f(x) \in f(f^{-1}(B \cup B')) \\
&\Leftrightarrow f(x) \in B \cup B' \\
&\Leftrightarrow f(x) \in B \text{ ou } f(x) \in B' \\
&\Leftrightarrow f^{-1}(f(x)) \in f^{-1}(B) \text{ ou } f^{-1}(f(x)) \in f^{-1}(B') \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \text{ ou } x \in f^{-1}(B') \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')
\end{aligned}$$

Conclusion. $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

- $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

Soit $x \in E$ on a :

$$\begin{aligned}
x &\in f^{-1}(B \cap B') \\
&\Leftrightarrow f(x) \in f(f^{-1}(B \cap B')) \\
&\Leftrightarrow f(x) \in B \cap B' \\
&\Leftrightarrow f(x) \in B \text{ et } f(x) \in B' \\
&\Leftrightarrow f^{-1}(f(x)) \in f^{-1}(B) \text{ et } f^{-1}(f(x)) \in f^{-1}(B') \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \text{ et } x \in f^{-1}(B') \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')
\end{aligned}$$

Conclusion. $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

Exercice 15

Soient $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ les applications définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f(k) = 2k \text{ et } g(k) = \begin{cases} \frac{k}{2} & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{k-1}{2} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

a) Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g .

b) Préciser les applications $f \circ g$ et $g \circ f$. étudier leur injectivité, surjectivité et bijectivité.

Corrigé:

a.

- $f(k) = 2k$

◦ injective

soit $x_1, x_2 \in \mathbb{N}^2$ on a :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

donc f n'est pas injective

◦ surjective

supposons que f est surjective

comme $1 \in \mathbb{N}$ donc $\exists k \in \mathbb{N} \quad f(k) = 1$

$$\text{donc } 2k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$$

ce qui est impossible

donc f n'est pas surjective

◦ bijective

comme f n'est ni injective ni surjective, elle n'est pas bijective

- $g(K)$
 - injective
 $g(0) = g(1) = 0 \Rightarrow 0 \neq 1$
donc g est pas injective
 - surjective
soit $n \in N$, comme $g(2n) = \frac{2n}{2} = n$
donc g est pas surjective
 - bijective
comme g n'est ni injective mais surjective, elle n'est pas bijective

b.

- $g \circ f$

on a: $f: N \rightarrow N$ et $g: N \rightarrow N$
 $n \mapsto f(n)$ $n \mapsto g(n)$

on a $\forall n \in N$ $g \circ f = g(f(x)) = g(2n) = n$

donc $g \circ f: N \rightarrow N$
 $n \mapsto n$

$g \circ f$ est bijective (évident)

- $f \circ g$

soit $n \in N$

si n est pair: $f \circ g(n) = f(g(n)) = f\left(\frac{n}{2}\right) = n$

si n est pair: $f \circ g(n) = f(g(n)) = f\left(\frac{n-1}{2}\right) = n - 1$

$f \circ g: N \rightarrow N$

$n \mapsto n$ si n pair

$n - 1$ si n impair

comme $f \circ g(0) = f \circ g(1) = 0$ et $0 \neq 1$

alors $f \circ g$ n'est pas injective, donc f n'est pas bijective

Exercice 16

Soit $f: N \rightarrow Z$ définie par $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Montrer que f est bien définie et bijective.

Corrigé:

on a $f: N \rightarrow Z$

$f(n) = \frac{n}{2}$ si n est pair ou $f(n) = -\frac{n+1}{2}$ si n est impair

- si n est pair $\exists k \in N, n = 2k$

$$f(2k) = \frac{2k}{2} = k \in Z$$

- si n est impair $\exists k \in N, n = 2k + 1$

$$f(2k + 1) = -\frac{2k+2}{2} = -(k + 1) \in Z$$

Donc f est bien définie

- Si x et x' sont paires avec $x = k$ et $x' = k'$

$$f(x) = f(x') \Rightarrow \frac{2k}{2} = \frac{2k'}{2} \Rightarrow k = k'$$

- Si x et x' sont impaires avec $x = 2k + 1$ et $x' = 2k' + 1$

$$f(x) = f(x') \Rightarrow -\frac{2k+2}{2} = -\frac{2k'+2}{2} \Rightarrow -2k = -2k' \Rightarrow k = k'$$

- Si x est pair et x' est impaires

$$f(x) > 0 \text{ et } f(x') < 0$$

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

donc dans tous les cas f est injective

$$\forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{N}$$

- si x est pair

$$f(x) = \frac{x}{2} = y \Rightarrow x = 2y$$

- si x est impair

$$f(x) = -\frac{x+1}{2} = y \Rightarrow -(x+1) = 2y \Rightarrow x = -2y - 1 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{N}$$

donc f est surjective

Donc f est bijective

Exercice 17

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. Etablir les implications suivantes

- $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
- $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective
- $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow g$ injective.
- $g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow f$ surjective.

Corrigé

- $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective

on suppose : $f(x) = f(x')$ et $Mq: x = x'$

$$g \circ f(x) = g \circ f(x')$$

$$g \circ f \text{ est injective} \Rightarrow x = x'$$

- $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective

$$\forall z \in G, \exists x \in E$$

$$z = g \circ f(x) = g[f(x)] = g(y)$$

$$\Rightarrow \forall z \in G, \exists y = f(x) \in F$$

$$z = g(y)$$

- $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow g$ injective

soit $x \in F$ et $y \in F$ tel que $g(x) = g(y)$

comme f est surjective et que $x \in F$ et $y \in F$, alors

$$\exists a \in E, x = f(a) \text{ et } \exists b \in E, y = f(b)$$

$$g(x) = g(y) \Rightarrow g(f(a)) = g(f(b))$$

$$\Rightarrow g \circ f(a) = g \circ f(b)$$

$$\Rightarrow a = b$$

$$\Rightarrow f(a) = f(b)$$

$$\Rightarrow x = y$$

D'où g est injective

- $g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow f$ surjective

Soit $y \in F$ alors $g(y) \in G$

or $g \circ f$ surjective alors

$\exists a \in E, g(y) = g \circ f(a)$

$g(y) = g(f(a))$

comme g est injective alors

$y = f(a)$

donc $\exists a \in E, y = f(a)$

Donc f est surjective

