

Corrigé de Devoir Algèbre**Exercice 1**

Évaluer les assertions suivantes en utilisant les tables de vérités. Indiquer alors lesquelles parmi ces assertions sont des tautologies et lesquelles sont des contradictions..

i. $(P \Leftrightarrow Q) \wedge (P \Leftrightarrow \bar{Q})$

ii. $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Corrigé:

i. $(P \Leftrightarrow Q) \wedge (P \Leftrightarrow \bar{Q})$

On a 2 propositions (S, L et M) Donc le nombre de est $2^2 = 4$

P	Q	$\bar{Q}$	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Leftrightarrow \bar{Q}$	$(P \Leftrightarrow Q) \wedge (P \Leftrightarrow \bar{Q})$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	V	F	F

D'après la tableau de vérité cet assertion est toujours fausse (contradiction)

ii. $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

On a 3 propositions (S, L et M) Donc le nombre de est $2^3 = 8$

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

D'après la tableau de vérité cet assertion est toujours vraie (tautologie)

Exercice 2

Soient P la proposition «les chiens aboient» et Q la proposition «la caravane passe».

Traduisez les phrases suivantes en langage propositionnel.

1. Les chiens n'aboient pas.
2. La caravane ne passe pas ou les chiens aboient.
3. Si la caravane ne passe pas, alors les chiens n'aboient pas

Corrigé:

1. Les chiens n'aboient pas

En langage propositionnel : $\bar{P}$

2. La caravane ne passe pas ou les chiens aboient

En langage propositionnel : $\bar{Q} \vee P$

3. Si la caravane ne passe pas, alors les chiens n'aboient pas

En langage propositionnel : $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$

Exercice 3

I. Soient $f: R \rightarrow R$, l'application définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

1. La fonction f est-elle injective? Surjective?
2. Déterminer $f(R)$.

II.

Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F et A et B deux parties de E, montrer que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Corrigé:

I.

$$f: R \rightarrow R, f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

1.

- La fonction f est-elle injective ?

$$f(2) = \frac{4}{1+4} = \frac{4}{5} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$

$$f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ mais } 2 \neq \frac{1}{2}$$

Donc f n'est pas injective

- La fonction f est-elle Surjective ?

$$\forall y \in R, \exists x \in R, f(x) = y$$

$$\frac{2x}{1+x^2} = y \Rightarrow yx^2 - 2x + y = 0 \text{ cette équation a des solution } x \text{ si et seulement}$$

$$\begin{aligned} \text{si } \Delta = 4 - 4y^2 \geq 0 &\Rightarrow 4 \geq 4y^2 \Rightarrow 1 \geq y^2 \Rightarrow y^2 \leq 1 \Rightarrow \sqrt{y^2} \leq 1 \\ &\Rightarrow |y| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1 \end{aligned}$$

$$R \rightarrow R \quad y \in [-1; 1]$$

Donc f n'est pas Surjective

2.

On a $-1 \leq y \leq 1$ et comme $f(x) = y$

Donc $-1 \leq f(x) \leq 1$

d'où $f(R) = [-1; 1]$

II.

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

Soit $y \in F$ on a :

$$y \in f(A \cup B)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in A \cup B, \text{ tel que } y = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in A \text{ ou } \exists x \in B$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in f(A) \text{ ou } f(x) \in f(B)$$

$$\Leftrightarrow y \in f(A) \text{ ou } y \in f(B)$$

$$\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B)$$

Conclusion. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Exercice 4

On définit sur l'ensemble $f(E, E)$ la relation Binaire R par :

$$fRg \Leftrightarrow \exists \phi \in S(E) \text{ telle que } f \circ \phi = \phi \circ g$$

1. Montrer que R une relation d'équivalence.

2. Décrire la classe d'équivalence d'une fonction donnée $f \in F(E, E)$

Corrigé:

1.

$$F(E, E) = \{f: E \rightarrow E\}$$

$$fRg \Leftrightarrow \exists \phi \in S(E) / f \circ \phi = \phi \circ g$$

$$S(E) = \{f: E \rightarrow E / f \text{ est bijective}\}$$

f est définie sur $F(E, E)$

• Réflexive: $\forall f \in F(E, E) . fRf$

il faut que $\phi \in S(E)$ et $f \circ \phi = \phi \circ g$

on prend $\phi = Id_E$, $f \circ Id_E = Id_E \circ f \Rightarrow f = f \Rightarrow fRf$

$\Rightarrow R$ est Réflexive

• Symétrique: $\forall f, g \in F(E, E) fRg$ Alors gRf

$$fRg \Leftrightarrow \exists \phi \in S(E) , f \circ \phi = \phi \circ g$$

$$\Leftrightarrow \phi^{-1} \circ f \circ \phi \circ \phi^{-1} = \phi^{-1} \circ \phi \circ g \circ \phi^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \phi^{-1} \circ f = g \circ \phi^{-1} \Leftrightarrow g \circ \phi^{-1} = \phi^{-1} \circ f \Leftrightarrow gRf$$

$\Rightarrow R$ est Symétrique

• Transitive: $\forall f, g, h \in F(E, E)$ Si $(fRg \text{ et } gRh) \Rightarrow fRh$

$$f R g \Leftrightarrow \exists \varphi \in S(E), f \circ \varphi = \varphi \circ g$$

$$g R h \Leftrightarrow \exists \psi \in S(E), g \circ \psi = \psi \circ h$$

$$f \circ \varphi = \varphi \circ g \Leftrightarrow f \circ \varphi \circ \psi = \varphi \circ g \circ \psi$$

$$\Leftrightarrow f \circ \varphi \circ \psi = \varphi \circ \psi \circ h \quad \text{On pose } \varphi \circ \psi = \Phi$$

$$\Leftrightarrow f \circ \Phi = \Phi \circ h \Rightarrow f R h$$

$\Rightarrow R$ est Transitive

Donc R est une relation d'équivalence

2.

$$C_f = \{g \in F(E, E) / f \circ g\}$$

$$f R g \Leftrightarrow \exists \varphi \in S(E) / f \circ \varphi = \varphi \circ g \Rightarrow g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$$

