

Exercice 1

A. A l'aide de la méthode des tables de vérité, dites si les formules suivantes sont des tautologies.

- i) $(P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P)$ Commutativité de la disjonction
 ii) $(\bar{P} \Rightarrow Q) \wedge (\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}) \Rightarrow P$ Preuve par l'absurde

B. Ecrire la négation des propositions suivantes :

1. Toutes les voitures rapides sont rouges;
2. il existe un mouton écossais dont au moins un côté est noir;
3. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $q \in \mathbb{Q}^{**}$ tel que $0 < q < \varepsilon$;
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 < 0$.

Exercice 2

Soit f l'application de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ dans lui-même définie par : $f(1)=4, f(2)=1, f(3)=2, f(4)=2$.

- 1) Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{2\}, A = \{1,2\}, A = \{3\}$.
- 2) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{1\}, A = [1,2]$.

Exercice 3

Déterminer le PGCD(2244,1089), leur PPCM ainsi que l'identité de Bézout correspondante.

Exercice 4

I. Soient $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi de composition interne définie sur G par

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. Montrer que $(G, *)$ est un groupe.
2. Montrer que $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un sous groupe de $(G, *)$.

II. Soit $Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Calculer $C_1 \circ C_2 \circ \sigma$; $C_1 \circ C_1$; $C_1 \circ \sigma$; $C_2 \circ \sigma$.