

Devoir**Exercice 1.**

Calculer les limites des suites suivantes :

$$a_n = \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^n - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{\left(\frac{1}{7}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n}; \quad b_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}; \quad u_n = \sqrt{16n^4 + 3n^2 + 6} - 4n^2 - 1$$

$$v_n = \ln(6n-1) - \ln(n+1) + \ln(2n+3) - \ln(4n+1)$$

Exercice 2.Montrer, à partir de la définition de limite, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n+1}{3+n} = 5$ **Exercice 3.**Soit $\{u_n\}$ la suite réelle définie par :
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+1} \end{cases}$$

- 1) Calculer u_2 et u_3
- 2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $0 < u_n \leq 2$
- 3) Étudier la monotonie de $\{u_n\}$
- 4) En déduire que $\{u_n\}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 4.

Calculer, lorsqu'elles existent, les limites des fonctions suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{(\sin x)^2} - \frac{1}{1 - \cos x} \right); \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x}-1}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + 5e^x - 6}{e^x - 1}$$

Exercice 5.

- 1) Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+5x+7}-1}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = -2 \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} \ln(1+x^2) \sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- 2) Peut-on prolonger la fonction suivante par continuité au point 1? Si oui, donner l'expression du prolongement.

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 1}$$