

Chapitre I: Systèmes Linéaires

I- Notion de système linéaire

Définition

Une équation linéaire à p inconnues est une expression de la forme

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_pX_p = b$$

Où $a_1, a_2, \dots, a_p$ et b sont des réels fixés et $X_1, X_2, \dots, X_p$ des symboles.

Une solution de cette équation est un p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de réels tel que, si l'on remplace les symboles $X_1, X_2, \dots, X_p$ dans l'équation par les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_p$, l'égalité correspondante est vraie.

Définition

Un système de n équations linéaires à p inconnues est une liste de n équations linéaires à p inconnues, la forme générale d'un système linéaire est la suivante :

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1p}X_p = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2p}X_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \dots + a_{ip}X_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \dots + a_{np}X_p = b_n \end{cases}$$

Où les a_{ij} sont les coefficients du système et sont les b_j constituent le second membre du système

Exemples :

Le système suivant a 2 équations et 3 inconnues $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$

On a :

$$n = 2, p = 3, a_{11} = 1, a_{12} = -3, a_{13} = 1, a_{21} = -2, a_{22} = 4, a_{23} = -3, b_1 = 1, b_2 = 9$$

Définition

Une solution du système linéaire est une liste de p nombres réels $(s_1, s_2, \dots, s_p)$ (un p-uplet) tels que si l'on substitue s_1 pour x_1 , s_2 pour x_2 , etc., dans le système linéaire, on obtient une égalité. L'ensemble des solutions du système est l'ensemble de tous ces p-uplets.

Exemples :

Le système (S) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$ admet comme solution $(-18, -6, 1)$

Définition

On dit que deux systèmes linéaires sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions

II- Différents types de systèmes

Théorème

Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.

Définition

Un système linéaire est dit homogène si le second membre est nul ($b_1 = b_2 = \dots = b_p = 0$)

Systèmes échelonnés.

Définition

Un système est échelonné si :

- le nombre de coefficients nuls commençant une ligne croît strictement ligne après ligne.

Il est échelonné réduit si en plus :

- le premier coefficient non nul d'une ligne vaut 1 ;
- et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Exemples :

Le système (S) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ -x_2 - 2x_3 = 4 \\ 3x_4 = 1 \end{cases}$ est échelonné mais pas réduit

Proposition

Considérons un système S échelonné réduit à n équations et p inconnues avec des coefficients réels (ou complexes) :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1p}X_p = b_1 \\ X_2 + \dots + a_{2p}X_p = b_2 \\ \\ \\ X_m + a_{mp}X_p = b_m \\ 0 = b_{m+1} \\ \\ \\ 0 = b_n \end{array} \right.$$

Alors :

- 1) Si un des b_i , pour $i > m + 1$, n'est pas nul, S n'a pas de solution.

On suppose désormais $b_{m+1} = \dots = b_n = 0$

- 2) Si $p > m$, S a une infinité de solutions,
- 3) Si $p = m$, S a une unique solution.

Opérations sur les équations d'un système.

Nous allons utiliser trois opérations élémentaires sur les équations (c'est-à-dire sur les lignes) qui sont :

- (1) $L_i \rightarrow \alpha L_i$ avec $\alpha \neq 0$ on peut multiplier une équation par un réel non nul.
- (2) $L_i \rightarrow L_i + \alpha L_j$ avec $\alpha \neq 0$: on peut ajouter à l'équation L_i un multiple d'une autre équation L_j .
- (3) $L_i \leftrightarrow L_j$: on peut échanger deux équations.

Ces trois opérations élémentaires ne changent pas les solutions d'un système linéaire ; autrement dit ces opérations transforment un système linéaire en un système linéaire équivalent.

Exemples :

Echelonner et réduire le système (S)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -5 \\ -x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = -1 \\ -3x_2 - 9x_3 = -3 \\ -x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -5 \end{cases} ; \quad \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + L_1} \begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = -1 \\ -3x_2 - 9x_3 = -3 \\ -2x_2 - 2x_3 = -6 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_2 \rightarrow -1/3 L_2} \begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = -1 \\ x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_2 - 2x_3 = -6 \end{cases} ; \quad \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 2L_2} \begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = -1 \\ x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_3 = -4 \end{cases} ;$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow 1/4 L_3} \begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = -1 \\ x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases} ; \quad \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 3L_3} \begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = -1 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = -1 \end{cases} ;$$

$$\xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 7L_3} \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = -1 \end{cases} ; \quad \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

On obtient ainsi l'unique solution du système (2, 4, -1)

Méthode du pivot de Gauss.

La méthode du pivot de Gauss permet de trouver les solutions de n'importe quel système linéaire. Il s'agit d'une suite d'opérations élémentaires à effectuer, qui dépendent de la situation et d'un ordre précis. Ce processus aboutit toujours (et en plus assez rapidement) à un système échelonné puis réduit, qui conduit immédiatement aux solutions du système.

On va décrire cet algorithme sur l'exemple suivant
$$\begin{cases} -x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 20x_4 = -1 \end{cases}$$

1) La forme échelonnée :

Pour appliquer la méthode du pivot de Gauss, il faut d'abord que le premier coefficient de la première ligne soit non nul

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ -x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 5 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 20x_4 = -1 \end{cases} ; \quad \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + L_1} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ -x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 5 \\ x_2 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + L_2} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ -x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 5 \\ 2x_3 + 10x_4 = 8 \end{cases}$$

2) La forme réduite :

$$\xrightarrow{L_2 \rightarrow -L_2 \text{ et } L_3 \rightarrow 1/2 L_3} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ x_2 - 2x_3 - 13x_4 = -5 \\ x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases} ; \quad \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + 2L_3} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ x_2 - 3x_4 = 3 \\ x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 2L_3} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_4 = -8 \\ x_2 - 3x_4 = 3 \\ x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$$

3) Les solutions

Le système est sous forme échelonnée réduite, il est maintenant très simple à résoudre.

En choisissant x_4 comme variable libre (paramètre), on peut exprimer les autres en fonction de x_4 : On trouve $x_1 = 4x_4 - 2$; $x_2 = 3x_4 + 3$; $x_3 = -5x_4 + 4$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathbf{S} = \{(4x_4 - 2, 3x_4 + 3, -5x_4 + 4) \text{ tq } x_4 \in R\}$