

Chapitre II: Espaces Vectoriels

I. Notion d'espace vectoriel

Dans ce cours $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition

Soit $(E; +; \cdot)$ un triplet constitué d'un ensemble E , d'une loi de composition interne "+" sur E et d'une loi de composition externe "." sur E . On dit que $(E; +; \cdot)$ est un espace vectoriel lorsque les lois "+" et "." vérifient les huit propriétés suivantes :

-  $\forall a, b \in E, a + b = b + a$ (commutativité de l'addition)
-  $\forall a, b, c \in E, a + (b + c) = (a + b) + c$ (associativité de l'addition)
-  $\exists e \in E$ tel que $\forall a \in E; a + e = e + a = a$ (existence d'un neutre pour l'addition)
-  $\forall a \in E \exists b \in E$ tel que $a + b = b + a = e$ (symétrisations de chaque élément de E)
-  $\forall x \in E 1.x = x$;
-  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E (\lambda \cdot \mu).x = \lambda.(\mu.x)$;
-  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
-  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2 \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

Remarques :

- 1) E est un ensemble dont les éléments sont appelés vecteurs.
- 2) $+$ est une loi de composition interne sur E telle que $(E, +)$ soit un groupe abélien.
L'élément neutre 0 est appelé vecteur nul.
- 3) $\cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$ telle que $(\lambda, x) \rightarrow \lambda.x$ est une loi de composition externe vérifiant :

Exemples :

- ✓ $(K, +, \cdot)$ où $\cdot$ est la multiplication dans K .
- ✓ $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ est un espace vectoriel avec les opérations ainsi définies :
 $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \dots, x_n + x'_n)$
 $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$
- ✓ L'ensemble E^D des applications d'un ensemble D dans un espace vectoriel E (les opérations dans E^D étant définies grâce à celles de E : $f+g : x \rightarrow f(x)+g(x)$; et $\lambda.f : x \rightarrow \lambda.f(x)$).

Propriétés élémentaires

- $\forall x \in E 0.x = 0$;
- $\forall \lambda \in K \lambda.0 = 0$;
- $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \lambda.x = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0)$;
- $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, (-\lambda).x = -(\lambda.x) = \lambda.(-x)$;

Espace vectoriel produit

Soit $(E_k, +, \cdot)_{1 \leq k \leq n}$ une famille de K -espaces vectoriels. L'ensemble $E_1 \times \dots \times E_n$ muni des lois $+$ et $\cdot$ définies par :

- $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
- $\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

est un K -espace vectoriel, appelé espace vectoriel produit de $E_1, \dots, E_n$.

Exemples :

- ✓ L'exemple canonique est K^n .
- ✓ $\mathbb{C}$ s'identifie à $\mathbb{R}^2$ en tant que $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- ✓

II. Sous-espaces vectoriels

Définition

Soit E un K -espace vectoriel et V une partie de E . On dit que V est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si la restriction de la loi $+$ à $V \times V$ et la restriction de la loi $\cdot$ à $K \times V$ induisent sur V une structure de K -espace vectoriel.

Caractérisations

Une partie V de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

- $0 \in V$
- $\forall (x, y) \in V^2, x + y \in V$
- $\forall (\lambda, x) \in K \times V, \lambda \cdot x \in V$

Ou bien

- $0 \in V$
- $\forall \lambda \in K, \forall (x, y) \in V^2, \lambda x + y \in V$

Exemples :

L'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

L'ensemble $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x + y = 2\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

III. Combinaisons linéaires et familles génératrices

Combinaisons linéaires

Définition :

Soit $u_1, u_2, \dots, u_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel $(E ; + ; \cdot)$. On dit que $v \in E$ est une combinaison linéaire de $u_1, u_2, \dots, u_n$ lorsqu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels Que $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$

Exemples :

- i) Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $u = (3; 3; 1)$ est-il combinaison linéaire de $v_1 = (1; 1; 0)$ et $v_2 = (1; 1; 1)$?

Il faut voir s'il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que $\lambda_1(1; 1; 0) + \lambda_2(1; 1; 1) = (3; 3; 1)$.

On est donc amené à résoudre le système
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Ce système a une (unique) solution $(\lambda_1; \lambda_2) = (2; 1)$, donc $u = 2v_1 + v_2$ est bien combinaison linéaire de v_1 et v_2 .

- ii) A quelle condition le vecteur $w = (a; b; c)$ est-il une combinaison linéaire de $u = (1; 2; -1)$ et $v = (6; 4; 2)$

Ça sera le cas s'il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que $\lambda_1(1; 2; -1) + \lambda_2(6; 4; 2) = (a; b; c)$.

Il s'agit donc de savoir à quelle condition sur $a; b$ et c le système (S) admet des solutions

$$S = \begin{cases} \lambda_1 + 6\lambda_2 = a \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = b \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = c \end{cases}$$

Par l'application de la méthode du pivot à ce système $(L_2: L_2 - 2L_1; L_3: L_3 + L_1; L_3: L_3 + L_1)$, et on obtient le système équivalent

$$S' = \begin{cases} \lambda_1 + 6\lambda_2 = a \\ -8\lambda_2 = b - 2a \\ 0 = c - a + b \end{cases}$$

Donc la condition est : $0 = c - a + b$

Familles génératrices

Proposition

Soit $u_1, u_2, \dots, u_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel $(E; +, \cdot)$. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $u_1, u_2, \dots, u_n$ est un sous-espace vectoriel de E . On le note $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ et on parle du sous-espace vectoriel engendré par la famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Définition

Soit $(E; +, \cdot)$ un espace vectoriel et G un sous-espace vectoriel de E . On dit que la famille de vecteurs $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ engendre G , ou encore est une famille génératrice de G , lorsque $G = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Exemples :

Dans R^3 , la famille $((1; 1; 2); (-1; 0; 1); (2; 1/3; -1))$ est-elle génératrice ?

On va chercher si un vecteur quelconque (x, y, z) de R^3 peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs. Autrement dit trouvons des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1(1, 1, 2) + \lambda_2(-1, 0, 1) + \lambda_3(2, \frac{1}{3}, -1) = (x, y, z)$ il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = x \\ \lambda_1 + \left(\frac{1}{3}\right)\lambda_3 = y \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = z \end{cases}$$

On utilise le pivot de Gauss, les opérations $(L_2: L_2 - L_1; L_3: L_3 - 2L_1)$ donnent

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \left(\frac{5}{3}\right)\lambda_3 = y - x \\ 3\lambda_2 - 5\lambda_3 = z - 2x \end{cases}$$

$$L_3 \rightarrow L_3 - 3L_2 \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \left(\frac{5}{3}\right)\lambda_3 = y - x \\ 0 = z - 3y + x \end{cases}$$

Le système admet des solutions si $z - 3y + x = 0$; donc la famille n'est pas génératrice de R^3 si : $z - 3y + x \neq 0$

IV. Bases d'un espace vectoriel

Familles libres

Définition

On dit que la famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel $(E; +, \cdot)$ est libre si : $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

Exemples :

i) Dans $R_n[X]$ la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est libre

- ii) Dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère la famille (cos; sin) constituée des deux fonctions trigonométriques cosinus et sinus bien connues, cette famille est libre
- iii) Soit a un réel, dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((1; 1; 2); (-1; 0; 1); (2; a; -1))$ est-elle libre ?

$\lambda_1(1, 1, 2) + \lambda_2(-1, 0, 1) + \lambda_3(2, a, -1) = (0, 0, 0)$ ce qui signifie :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + a\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} ; (L_2: L_2 - L_1 \text{ et } L_3: L_3 - 2L_1) \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + (a-2)\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$L_3 \rightarrow L_3 - 3L_2 \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + (a-2)\lambda_3 = 0 \\ (1-3a)\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Si $a \neq \frac{1}{3} \Rightarrow \lambda_3 = 0$ et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ aussi et les vecteurs sont libres

Si $a = \frac{1}{3} \Rightarrow \lambda_3 \neq 0$ et donc la famille n'est pas libre

Base d'un espace vectoriel

Définition

On dit que la famille $B = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel $(E; +; \cdot)$ est une base de E lorsque B est libre et génératrice

Exemples :

i) Dans $\mathbb{R}^n$ on note $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$; $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$; $\dots$; $e_n = (0, 0, \dots, 1)$

La famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ qu'on appelle base canonique de $\mathbb{R}^n$.

ii) Dans $\mathbb{R}_n[X]$ la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base appelée aussi base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

Proposition

Soit $(E; +; \cdot)$ un espace vectoriel. On suppose que E admet

- une famille génératrice $(u_1, u_2, \dots, u_n)$,
- une famille libre $(v_1, v_2, \dots, v_p)$.

Alors nécessairement $p \leq n$. De plus, si $p = n$, alors $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ sont des bases de E .

Dimension d'un espace vectoriel

Proposition

E admet une base, alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.

Définition

Soit $(E; +; \cdot)$ un espace vectoriel non nul. S'il existe une base de E , on appelle dimension de E , et on note $\dim E$, le nombre commun d'éléments de toutes les bases de E . Sinon on dit que E est de dimension infinie, et on note $\dim E = +\infty$.

Proposition (Dimension et inclusion)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit V et W deux sous-espaces vectoriels de E , tels que $V \subset W$. Alors V et W sont de dimension finie et $\dim V \leq \dim W$. De plus $V = W$ si et seulement si $\dim V = \dim W$.

Exemples :

1) Soit $v_1 = (1, 2, 3, 0)$; $v_2 = (0, 2, 2, 4)$ et $v_3 = (-1, a, 2a-3, 4a)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$, et $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$, donner une base de F .

Par définition, la famille (v_1, v_2, v_3) est une famille génératrice de F , et on veut trouver une base de F .

Si la famille (v_1, v_2, v_3) est libre, c'est une base. Or l'équation

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$ équivaut au système :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + (2a-3)\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_2 + 4a\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

En appliquant le pivot de gauss on obtient le système échelonné suivant

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + (a+2)\lambda_3 = 0 \\ (a-2)\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Donc :

- Si $a \neq 2$, le système est de rang 3, et admet une unique solution $(0; 0; 0)$. Donc (v_1, v_2, v_3) est une base dans ce cas.
- Si $a = 2$, le système est de rang 2 et admet une infinité de solutions, donc (v_1, v_2, v_3) n'est pas une famille libre. Mais on peut dire plus : λ_3 est la seule inconnue secondaire, on peut exprimer les autres inconnues en fonction de λ_3 ce qui va donner $\lambda_2 = -2\lambda_3$ et $\lambda_1 = \lambda_3$.

La solution sera donc $(\lambda_3; -2\lambda_3; \lambda_3) = \lambda_3(1, -2, 1) = Vect(1, -2, 1)$.

On constate $v_3 = -v_1 + 2v_2$ donc (v_1, v_2) est une famille génératrice de F, il est aussi facile de voir que c'est une famille libre donc est une base de F.

2) Soit $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } 2x_1 + 3x_2 = 0; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ donner une base de V.
V est l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \rightarrow 2L_2 - L_1} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ -\frac{1}{2}x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

On adonc $x_2 = 2x_3$ et $x_1 = -3x_3$

Autrement dit $\{(-3x_3, 2x_3, x_3); x_3 \in \mathbb{R}\}$ ou encore $V = Vect(-3, 2, 1)$

Proposition (Théorème de la base incomplète)

Soit $(E; +; \cdot)$ un espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E en lui adjoignant des vecteurs d'une base de E

V. Intersection et somme de sous-espaces vectoriels

Théorème : l'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque En général, l'union de deux sous-espaces vectoriels de E n'est pas un sous-espace vectoriel de E (c'en est un si et seulement si l'un des deux sous-espaces considérés est inclus dans l'autre. . .).

Sous-espace engendré par une partie ou une famille

Soit A une partie de E. On appelle sous-espace vectoriel engendré par A l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A, notée VectA.

VectA est le plus petit (au sens de l'inclusion) des sous-espaces de E contenant A.

VectA est l'ensemble formé du vecteur nul et des vecteurs de la forme $\sum_{k=1}^p \lambda_k a_k$, où les λ_k sont des scalaires et les a_k des vecteurs de A (Vect $\phi = \{0\}$).

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs de E, on note Vect $(x_i)_{i \in I}$ les sous-espaces engendré par la partie $\{x_i \in I\}$.

Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition : soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E , on appelle somme de F et G la partie de E notée $F + G$ définie par : $F + G = \{x \in E / \exists (y, z) \in F \times G, x = y + z\}$.

Théorème : $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E . C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant F et G (autrement dit $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$).

Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition :

Soit F et G Deux sous-espaces vectoriels de E

On dit que F et G sont en somme directs si $F \cap G = 0_E$ dans ce cas on note $W = F \oplus G$
l'espace $W = F + G$

Si de plus $E = F \oplus G$ on dit que F et G sont dits supplémentaires dans E

Théorème : les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) F et G sont supplémentaires dans E .
- b) $E \subset F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.

Proposition

Soit $(E; +, \cdot)$ un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
On a toujours $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$