

Chapitre III: Matrices et Déterminants

I- Matrice

Définition

Une matrice à n lignes et p colonnes est un tableau de nombre de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}; \text{ les nombres } a_{ij} \text{ sont appelés les coefficients de la matrice } A$$

On note souvent $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (a_{ij})$

Les nombres n et p sont appelés dimension (taille) de la matrice

On note $M_{n,p}(R)$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes de nombres réels. Si les dimensions d'une matrice sont égales, i.e. s'il y a autant de lignes que de colonnes, on dit que la matrice est carrée, et on note simplement $M_n(R)$ l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes.

Exemples

i) La matrice nulle est la matrice dont tous les coefficients sont nuls $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

ii) La matrice d'un système linéaire à n équations et p inconnues

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1p}X_p = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2p}X_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + a_{np}X_p = b_n \end{cases}$$

Est le tableau à n lignes et p colonnes dont les coefficients sont les a_{ij} :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

La matrice complète du système est la matrice à n lignes et $p + 1$ colonnes définie par

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & b_n \end{pmatrix}$$

iii) Matrice élémentaire est une dont tous les coefficients sont nuls sauf l'un d'entre

eux qui vaut 1. On note $E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

iv) Si une matrice n'a qu'une ligne, on parle de matrice-ligne. Lorsqu'elle n'a qu'une colonne, on parle de matrice-colonne

Opérations sur les matrices

a) Addition

Définition

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $M_{n,p}(R)$. On note $C = A + B$ la matrice de $M_{n,p}(R)$ définie par $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ Plus explicitement

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1p} + b_{1p} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2p} + b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}$$

Proposition : $(M_{n,p}(R), +)$ est un groupe commutatif.

b) Multiplication d'une matrice par un scalaire

Définition

Soit $A = (a_{ij})$ une matrices de $M_{n,p}(R)$, et λ un réel on note $C = \lambda A$ la matrice de $M_{n,p}(R)$ définie par $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ plus explicitement

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1p} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}$$

Proposition : $(M_{n,p}(R); +; \cdot)$ est un espace vectoriel, de dimension np.

c) Produit des matrices

Définition

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice à n lignes et p colonnes, et $B = (b_{ij})$ une matrice à p lignes et m colonnes. On note $C = A \times B$ la matrice à n lignes et m colonnes dont les coefficients c_{ij} sont donnés par $C_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots \cdots \cdots + a_{ip} b_{pj}$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, on voit que le produit AB est bien définie car A possède 3 colonnes et B a 3 lignes.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*1 + 2*0 + 3*2 & 1*(-1) + 2*1 + 3*3 \\ 0*1 + (-1)*0 + 1*2 & 0*(-1) + (-1)*1 + 1*3 \end{pmatrix}$$

Remarque :

- Le produit matriciel n'est pas commutatif
- Le produit matriciel est associatif
- Le produit des matrices est distributif par rapport à l'addition, à gauche et à droite :
- Si $AB = 0$ ceci n'implique pas que $A = 0$ ou $B = 0$.

d) Inverse d'une matrice carrée

Définition

La matrice de $M_n(R)$ dont les éléments sont tous nuls, sauf ceux qui se trouvent sur la diagonale qui valent 1 s'appelle matrice identité elle se note I_n ou I .

Pour tout matrice A de $M_n(R)$ on a $AI_n = I_nA = A$

Exemple

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ainsi de suite}$$

Définition

Soit $A \in M_n(R)$ On dit que A admet la matrice $Q \in M_n(R)$ pour inverse si $AQ = QA = I_n$.

Une matrice A admet au plus une matrice inverse

Proposition

Soit $A \in M_n(R)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) La matrice A est inversible.
- ii) Le système $AX = B$ a une unique solution pour tout second membre $B \in M_{n,1}(R)$.
- iii) La matrice de la forme échelonnée réduite du système est la matrice identité I .

Calcul de l'inverse par la méthode de Gauss

Pour calculer l'inverse d'une matrice inversible par la méthode du pivot de gauss on place à droite de A la matrice identité, et on effectue sur les lignes de la grande matrice obtenue toutes les opérations élémentaires nécessaires pour obtenir sa forme échelonnée réduite. Si cette forme est la matrice identité, c'est que A est inversible et dans ce cas, la matrice de droite est A^{-1} .

Exemple

Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Pour savoir si la matrice A est inversible et calculer son inverse éventuel, on écrit

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right); \quad \xrightarrow{L_3 \rightarrow 2L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 3L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -3 & 2 \end{array} \right); \quad \xrightarrow{L_3 \rightarrow \frac{-1}{4}L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \right); \quad \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{6}{4} & \frac{2}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \right); \quad \xrightarrow{L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\text{Donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrices Triangulaires

Définition

- Soit la matrice A de $M_n(R)$, on dit que A est triangulaire inférieure (resp triangulaire supérieure) si : $a_{ij} = 0 ; i < j$ (resp $i > j$)
- une matrice A de $M_n(R)$, qui est triangulaire inférieure et triangulaire supérieure est dite diagonale, autrement dit $a_{ij} = 0 ; si i \neq j$
- une matrice A de $M_n(R)$, est dite nilpotente, s'il existe $k \in N$ tel que $A^k = 0$

Définition

- Soit la matrice A de $M_{n,p}(R)$, on appelle matrice transposée de A la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A , elle se note A^T

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} ; A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

- une matrice A de $M_n(R)$, est dite symétrique si elle est égale à sa transposée $A = A^T$
- une matrice A de $M_n(R)$, est dite antisymétrique si $-A = A^T$

II- Les Déterminants

Définition

Le déterminant est une application qui à une matrice carrée associe un scalaire

$\det: M_n(R) \rightarrow R$ qui renvoie A vers $\det(A)$

Déterminant en dimension 2 et 3

Définition et Exemple

- En dimension 2 le déterminant est donné par : $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ donc : } \det \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 14 = 6$$

- En dimension 3, le déterminant peut être calculé par la règle de Sarrus

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1(-1)2 + 3.1(-2) + (-1)3.1 - ((-2)(-1)(-1) + 1.1.1 + 2.3.3) \\ &= -11 - (17) = -28\end{aligned}$$

Déterminant en dimension n

Définition

Le mineur A_{ij} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de A.

Le cofacteur, C_{ij} , d'une matrice A est défini par la relation $C_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ on a donc $A_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 5.3 - 8.3 = -9$; $C_{12} = (-1)^{1+2} A_{12} = 9$

Définition

On définit le déterminant d'une matrice d'ordre n quelconque, par un procédé récurrent :
Soit n un entier naturel non nul et $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, une matrice carrée. Le déterminant de A est le nombre noté $\det(A)$ tel que :

- Si $n = 1$ (i.e. $A = (a)$) alors $\det(A) = a$
- Si $n \geq 2$ alors $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} A_{i1}$ ou A_{i1} est le mineur de la matrice d'ordre n-1 construite à partir de A en supprimant la ième ligne et la 1ère colonne

On note $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Proposition (Propriétés)

- 1) Si A est une matrice triangulaire (et en particulier diagonale), $\det(A)$ est égal au produit des coefficients diagonaux de A. En particulier, $\det(I_n) = 1$.
- 2) Si deux colonnes ou deux lignes de A sont identiques ou qu'une colonne est une combinaison linéaire d'autres colonnes alors $\det(A) = 0$.
- 3) Si deux lignes de A sont identiques ou qu'une ligne est une combinaison linéaire d'autres lignes alors $\det(A) = 0$.
- 4) On ne change pas $\det(A)$ si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.
- 5) On ne change pas $\det(A)$ si on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes.
- 6) $\det(A)$ change de signe lorsqu'on intervertit deux colonnes de A
- 7) $\det(A)$ change de signe lorsqu'on intervertit deux lignes de A.
- 8) $\forall \lambda \in K, A \in M_n(K) \quad \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- 9) $\forall A \in M_n(K) \quad \det({}^t A) = \det(A)$
- 10) $\forall A, B \in M_n(K) \quad \det(A.B) = \det(A) \times \det(B)$
- 11) $\forall p \in \mathbb{N}, A \in M_n(K) \quad \det(\lambda^p A) = (\det(A))^p$
- 12) $\forall A \in M_n(K) \quad (A \text{ inversible} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0) \text{ et } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Expansion par cofacteur

En pratique, pour calculer le déterminant d'une matrice carrée, on commence par effectuer des opérations sur les lignes et/ou colonnes de la matrice pour obtenir une ligne ou une

colonne contenant un maximum de coefficients nuls, puis on effectue un développement par rapport à cette ligne ou colonne en vertu du théorème suivant

Théorème :

Soit $A \in M_n(K)$

$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^n C_{ij} A_{ij}$ Développement par rapport à la $j^{ème}$ colonne

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n C_{ij} A_{ij}$ Développement par rapport à la $i^{ème}$ ligne

ou A_{ij} est le mineur construit à partir de A en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne et C_{ij} le cofacteur correspondant.

Exemple :

Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Il devient essentiel, pour réduire le nombre de calculs, de choisir la ligne ou la colonne qui contient le plus grand nombre de zéros, en l'occurrence, la 4^e colonne. Nous procéderons donc à une expansion par cofacteurs le long de la 4^e colonne ce qui veut dire que

$$\det(A) = a_{14}C_{14} + a_{24}C_{24} + a_{34}C_{34} + a_{44}C_{44}$$

$$C_{24} = (-1)^{2+4}A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 18$$

$$C_{34} = (-1)^{3+4}A_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -((-1)^{1+1}1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}) = -2$$

$$\det(A) = 1 \times 18 + 1 \times (-2) = 16$$