

Chapitre IV: Applications linéaires

I. Généralités

Définition

Soit E et F deux espaces vectoriels on dit qu'une application $f: E \rightarrow F$ est linéaire si :

$$\forall a, b \in E, \forall \lambda \in R, \text{ on a } f(a + b) = f(a) + f(b) \text{ et } f(\lambda a) = \lambda f(a)$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Les applications linéaires sont aussi appelées "morphismes d'espace vectoriel". Comme pour les sous-espaces vectoriels, on peut vérifier les deux propriétés de la définition en une fois :

$$\forall a, b \in E, \forall \lambda, \mu \in R, \text{ on a } f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b)$$

Exemples

- L'application $f: R^2 \rightarrow R^2$ définie par $f(u) = \alpha f(u)$ est linéaire, il s'agit de l'homothétie vectorielle de rapport α
- Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(R)$ une matrice. L'application $f: R^n \rightarrow R^p$ définie par $f(X) = AX$ est linéaire.
- On note $C^0[0, 1]$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans R . On sait qu'une telle fonction est intégrable sur $[0, 1]$ et on a :

$$\int_0^1 (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_0^1 f(x) dx + \mu \int_0^1 g(x) dx$$

Autrement l'application $\varphi: C^0[0, 1] \rightarrow R$ définie par $\varphi(f) = \int_0^1 f(x) dx$ est linéaire

Proposition

L'ensemble $\mathcal{L}(E; F)$ des applications linéaires de E dans F , muni de l'addition des fonctions et de la multiplication d'une fonction par un nombre, est un espace vectoriel

Proposition

Soit $E; F$ et G trois espaces vectoriels. Soit $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$, deux applications linéaires. Alors $g \circ f: E \rightarrow G$ est une application linéaire.

II. Noyau et Image

Noyau d'une application linéaire

Définition

Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire. Le sous-ensemble de E des éléments dont l'image est 0_F est appelé noyau de f . On le note $\text{Ker } f = \{x \in E; f(x) = 0_F\}$

Proposition

Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire. Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E .

Proposition

Une application linéaire $f: E \rightarrow F$ est injective si et seulement si son noyau ne contient que le vecteur nul de E .

Exemple

Une application linéaire $f: R^3 \rightarrow R^3$ définie par $f(x, y, z) = (y + z, x + z, x - y)$

On a $(x, y, z) \in \text{Ker } f$ ssi (x, y, z) est solution du système
$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Par la méthode du pivot de Gauss on a :

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}; \quad \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_1} \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}; \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Donc $x = -z$ et $y = -z$ ce qui veut dire que $(-z, -z, z) = z \cdot (-1, -1, 1)$ est la solution du système donc $\text{Ker } f = \text{Vect}(-1, -1, 1)$, le noyau n'est pas réduit à zéro donc f n'est pas injective.

Image d'une application linéaire

Définition

Le sous-ensemble de F constitué des images par f des éléments de E est appelé image de f . On le note : $\text{Im } f = \{f(x); x \in E\}$

Proposition

Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire. L'image de f est un sous-espace vectoriel de F .

Proposition

Une application linéaire $f: E \rightarrow F$ est surjective si et seulement si $\text{Im } f = F$

Exemple

Une application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (y + z, x + z, x - y)$

Un vecteur $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ est dans l'image de f si et seulement s'il existe une $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

tel que $f(x, y, z) = (x', y', z')$ autrement dit si et seulement si le système $\begin{cases} y + z = x' \\ x + z = y' \\ x - y = z' \end{cases}$ admet

au moins une solution.

Par la méthode du pivot de Gauss on a :

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{cases} x + z = y' \\ y + z = x' \\ x - y = z' \end{cases}; \quad \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_1} \begin{cases} x + z = y' \\ y + z = x' \\ -y - z = z' - y' \end{cases}; \quad \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_2 + L_3} \begin{cases} x + z = y' \\ y + z = x' \\ 0 = x' - y' + z' \end{cases}$$

Donc ce système est compatible si et seulement si $x' - y' + z' = 0$ donc

$\text{Im } f = \{(x', y', z') \in \mathbb{R}^3; x' - y' + z' = 0\} \neq \mathbb{R}^3$ donc f n'est pas surjectif

On peut donner une base de $\text{Im } f$: ce sous-espace vectoriel est donné par le système à une équation $x' - y' + z' = 0$. Comme l'équation est non-nulle, son rang est 1. La seule inconnue principale est x' , et y', z' sont les inconnues secondaires. Le système s'écrit donc L' ensemble de solution est donc $(y' - z', y', z') = y'(1, 1, 0) + z'(-1, 0, 1)$ donc $\text{Im } f = \text{vect}((1, 1, 0); (-1, 0, 1))$

Proposition

Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire. Si f est bijective, alors son application réciproque $f^{-1}: F \rightarrow E$ est aussi linéaire.

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un espace vectoriel quelconque. Soit B_E une base de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire.

- i) f est injective si et seulement si $f(B_E)$ est une famille libre de F ; en particulier, si f est injective on a $\dim E \leq \dim F$.
- ii) f est surjective si et seulement si $f(B_E)$ est une famille génératrice de F ; en particulier, si f est surjective on a $\dim F \leq \dim E$.
- iii) f est bijective si et seulement si $f(B_E)$ est une base de F ; en particulier si f est bijective on a $\dim E = \dim F$.

Le théorème du rang

Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle rang de f la dimension de $\text{Im } f$, et on note $\text{rang}(f) = \dim \text{Im } f$:

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On a $\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$:

Corollaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F dimension finie. Si $\dim E = \dim F$, on a l'équivalence f bijective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow f$ injective:

III. Matrices d'une application linéaire

On considère deux espaces vectoriels E et F de dimension finie, respectivement p et n . On choisit une base $B_E = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ de E , et une base $B_F = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. La donnée de l'image par f des vecteurs de la base B_E détermine entièrement l'application f .

Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. On appelle matrice de f dans les bases B_E et B_F la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(R)$ dont les p colonnes sont les coordonnées des images par f des vecteurs de B_E dans la base B_F . On la note

$$A = \text{Mat}_{B_E B_F}(f) = \begin{pmatrix} f(u_1) & f(u_2) & \dots & f(u_p) \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{Avec } f(u_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$$

Exemples

- 1) On considère l'espace vectoriel R^n , et $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base quelconque de R^n . La matrice de l'homothétie $h_\lambda: R^n \rightarrow R^n$ de rapport λ dans les bases B et B est

$$H_\lambda = \text{Mat}_{BB}(h_\lambda) = \begin{pmatrix} h_\lambda(e_1) & h_\lambda(e_2) & \dots & h_\lambda(e_p) \\ \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

- 2) On note $f_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ la matrice de f_θ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est donc $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. La matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice de f dans les bases B_E et B_F , si et seulement si pour tout $x \in E$, de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ dans la base

B_E , les coordonnées $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ de son image $y = f(x)$ dans la base B_F , vérifient $Y = A \times X$.

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire, et $A = \text{Mat}_{B_E B_F}(f)$ sa matrice dans B_E et B_F . Le rang de f est le rang du système linéaire associé à la matrice A .

Proposition

Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, et deux applications linéaires $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Soit aussi B_E, B_F et B_G des bases respectives de E, F et G , et $A = \text{Mat}_{B_E B_F}(f)$, $B = \text{Mat}_{B_F B_G}(g)$.

Alors la matrice C de l'application linéaire $g \circ f: E \rightarrow G$ dans les bases B_E et B_G est donnée par le produit $B \times A = C = \text{Mat}_{B_E B_G}(g \circ f) = \text{Mat}_{B_F B_G}(g) \times \text{Mat}_{B_E B_F}(f)$

Proposition

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, respectivement p et n . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire, et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice de f dans les bases B_E de E et B_F de F . L'application f est bijective si et seulement si la matrice A est une matrice carrée inversible. Dans ce cas $\text{Mat}_{B_F B_E}(f^{-1}) = A^{-1}$

Changement de base

Matrice de passage d'une base dans une autre

Soit E un espace vectoriel de dimension n . Soit $B = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base de E , et $B' = (u'_1, u'_2, \dots, u'_n)$ une "nouvelle base" de E . En général, les vecteurs de $(u'_1, u'_2, \dots, u'_n)$ sont donnés par leurs coordonnées dans "l'ancienne base" B , et il est naturel et très simple de former la matrice P des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base B' dans l'ancienne base

$$P = \begin{pmatrix} (u'_1) & (u'_2) & \dots & (u'_n) \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition

La matrice P des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base B' dans l'ancienne base B est appelée matrice de passage de B à B' . On la note $P_{BB'}$.

Exemple

Soit $B = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ $e'_1 = (1, -1)$ et $e'_2 = (0, 2)$

On constate que les vecteurs e'_1 et e'_2 ne sont pas colinéaires, donc $B' = (e'_1, e'_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. La matrice de passage de B à B' $P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $B = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $B' = (u'_1, u'_2, \dots, u'_n)$ deux bases de E , La matrice de de passage de B dans B' est la matrice de l'application identité de E dans les bases B' et B . Autrement dit $P_{BB'} = \text{Mat}_{BB'}(Id)$

Proposition

Une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice de passage de la base B à la base B' si et seulement si,

pour tout vecteur $x \in E$, ses coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base B , $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ dans la

base B' vérifient $X = P \times X'$

Proposition

Si P est la matrice de passage de B à B' , alors P^{-1} est la matrice de passage de B' à B .

Matrices semblables

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et A la matrice de f dans les bases B_E et B_F . Soit aussi B'_E et B'_F des nouvelles bases de E et F respectivement. Alors la matrice A' de f dans les B'_E et B'_F est donnée par $A' = (P_{B_F B'_F})^{-1} \times A \times (P_{B_E B'_E})$

Définition

On dit que deux matrices A et B sont semblables lorsqu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Chapitre V: Diagonalisations des Matrices Carrées

Définition

Soit A une matrice. On dit que la matrice A est diagonalisable si et seulement si, il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que $A = PDP^{-1}$

Exemple

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, en effet si on prend $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\text{On a } P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Proposition

Soit A une matrice. On suppose qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D telle que : $A = PDP^{-1}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(R)$ une matrice et λ un réel.

- On dit que λ est une valeurs propre de la matrice A , si et seulement si, il existe

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(R) \text{ non nul tel que } AX = \lambda X$$

- La matrice X est alors appelée vecteur propre associé à la valeur propre λ .

Exemple

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix}$; $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Montrer que v_1 , v_2 et v_3 sont des vecteurs propres de la matrice M , et préciser les valeurs propres associés.

- On constate que v_1 est non nul et que $Mv_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1$; ce qui prouve que v_1 est vecteur propre de M pour la valeur propre 1.
- On constate que v_2 est non nul et que $Mv_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6v_2$; ce qui prouve que v_2 est vecteur propre de M pour la valeur propre 6.
- On constate que v_3 est non nul et que $Mv_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2v_3$; ce qui prouve que v_3 est vecteur propre de M pour la valeur propre -2.

Proposition

Soit A une matrice et λ un réel. Il n'y a que deux possibilités pour l'ensemble des solutions de l'équation $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(R)$:

- ou bien cet ensemble contient uniquement la matrice-colonne nulle, auquel cas λ n'est pas valeur propre de A ;
- ou bien cet ensemble ne contient pas uniquement la matrice colonne non nulle, auquel cas λ est valeur propre de A , et toute matrice non nulle de cet ensemble est un vecteur propre associé à la valeur propre λ .

Définition

Soit A une matrice carrée et $P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p$ un polynôme. On définit le polynôme matriciel $P(A)$ comme étant la matrice carrée :

$P(A) = a_0 + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_pA^p$. On dit que le polynôme P est annulateur de la matrice A lorsque $P(A) = 0_n$.

Définition

Soit A une matrice carrée, λ un réel, on définit le polynôme caractéristique de A par la formule $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur de A , ces racines sont les valeurs propres de A .

Exemple

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ vérifier que $x^3 + x^2 + 1$ est un polynôme annulateur de M