

Institut Supérieur du Numérique
Année universitaire 2022 / 2023
Session Principale d'Algèbre II

Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés
Durée 1 h 30 mn

Exercice 1

Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on note $M_{a,b,c}$ la matrice : $M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

1. Ecrire $M_{a,b,c}$ sous la forme $aI_3 + bJ + cK$ (J et K sont à préciser)
2. Montrer que l'ensemble $E = \{M_{a,b,c}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$ est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$
3. Donner une base de E et préciser sa dimension
4. Calculer J^2, JK, KJ et K^2
5. Déterminer les éléments inversibles de E , et, pour chacun d'eux, préciser son inverse

Exercice 2

Désignons par $B = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$

On considère l'application linéaire : $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de matrice A dans la base B ,

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(2, 5)$ et $f(1, 3)$
2. On pose $v_1 = (2, 5)$ et $v_2 = (1, 3)$. Montrer que $B' = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$
3. Quelle est la matrice A' de f dans cette nouvelle base
4. Donner la matrice de passage de B à B'
5. Ecrire la formule reliant A et A' . Calculer P^{-1} et vérifier cette formule
6. Déterminer le noyau de f .
7. f est elle injective ? surjective ?

Bonne Chance