

Institut Supérieur du Numérique
Année Universitaire 2023 - 2024
Session de Rattrapage d'Algèbre II

Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés

Durée 1 h 30 mn

Exercice 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3
2. Calculer $A^3 - A^2 + A - I_3$
3. Donner l'inverse de A en fonction de A^2 , A et I_3
4. Calculer A^4
5. Quel est l'inverse de A^2 ? ce lui de A^3 ?

Exercice 2

Soit l'application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, (x, y, z) \rightarrow (x + z, y - z, z + y, x + y + 2z)$

1. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$
2. Déterminer une base de $\text{ker}(f)$
3. L'application f est-elle injective? surjective?

Exercice 3

Soit l'application linéaire:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ telle que } f(x, y, z) = (x - y - 2z, 3x - 2y + z)$$

Et soient $v_1 = (1, 1, -2), v_2 = (0, 1, -1), v_3 = (3, 1, 0)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

1. Vérifier que $v = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de f quand $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis de leur base canonique
3. Écrire la matrice de f quand $\mathbb{R}^3$ est muni de la base v et $\mathbb{R}^2$ de sa base canonique.
4. Écrire la matrice de f quand $\mathbb{R}^3$ est muni de la base v et $\mathbb{R}^2$ de la base $w = \{w_1, w_2\}$ avec $w_1 = (1, 1)$ et $w_2 = (-1, 2)$