

Institut Supérieur du Numérique
Algèbre II / Série 1

Exercice I

Résoudre les systèmes linéaires suivants

$$(S_1) \begin{cases} 3x + y + z + 2t = 1 \\ y - 2z + t = 3 \\ 4z - t = 2 \\ 2t = -4 \end{cases}; (S_2) \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ 2x + 3y + 8z = 4 \\ 4x - y + 4z = 0 \end{cases}; (S_3) \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ s - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$$(S_4) \begin{cases} x + my + 2z = m \\ -2x + y + (m - 2)z = 1 \\ mx + y + 2z = 2m - 1 \end{cases}; (S_5) \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -4x + 2y + z = 3 \\ -2x + y + 4z = 4 \\ 10x - 5y - 6z = -10 \end{cases}$$

Exercice II

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels?

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + 3z = 0\}$;
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + 3z = 2\}$;
3. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = y = 2z = 4t\}$;
4. $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0\}$;
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x^2\}$;
6. $E_6 = \{P \in \mathbb{R}[X]; P(0) = P(2)\}$;
7. $E_7 = \{P \in \mathbb{R}[X]; P'(0) = 2\}$;
8. $E_8 = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ est croissante}\}$

Exercice III

Déterminer une famille génératrice de :

1. $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \text{ tel que } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathbb{R}\}$
2. $\mathbb{R}_2[X] = \{a_2X^2 + a_1X + a_0 \text{ avec } (a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^3\}$

Exercice IV

On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$

1. $u = (1, 1); v = (1, 2); w = (1, -3)$
2. $u = (1, -2); v = (2, 3); w = (1, 2)$

Les vecteurs w sont-ils combinaison linéaire des vecteurs u et v ?

Exercice V

Les familles suivantes sont-elles libres:

1. $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (4, 1, 4), v_3 = (2, -1, 4)$ dans $\mathbb{R}^3$
2. $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 2, 2), v_3 = (3, 7, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$
3. $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$
4. $v_1 = (1, 2, 1, 2, 1), v_2 = (2, 1, 2, 1, 2), v_3 = (1, 0, 1, 1, 0), v_4 = (0, 1, 0, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^5$

Exercice VI

A. Montrer que les familles suivantes sont libres dans l'espace vectoriel des $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels

i) $(X, (X - 1))$

ii) $(X^2, (X^2 - 1))$

iii) $(X^2, (X - 1)^2, (X - 2)^2)$

B. Montrer que la famille (f, g, h) est libre dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dans les cas suivants.

i) $f : x \rightarrow 1, g : x \rightarrow x, h : x \rightarrow x^2$

ii) $f : x \rightarrow 1, g : x \rightarrow |x|, h : x \rightarrow \sqrt{|x|}$

iii) $f : x \rightarrow e^x, g : x \rightarrow \cos(x), h : x \rightarrow \sin(x)$

Exercice VII

On considère les trois vecteurs $u = (1, -1, 1), v = (0, -1, 2), w = (1, -2, 3)$ de $\mathbb{R}^3$. Soient $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\}$ et $F = \text{vect}(u, v, w)$, on admet que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $F = G$.