

Institut Supérieur du Numérique
Algèbre II / Série 2

Exercice I

On considère les matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculer $AB, BA, BC, CD, DC, DA, AD, (AB) + C, {}^tAC$

Exercice II

Soit $P, Q \in M_n(R)$ expliquer pour quoi $(P + Q)^2 \neq P^2 + 2PQ + Q^2$

Exercice III

Soient les matrices à coefficients réels suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer $AB, BA, AC, CA, BC, CB, B^2$
- 2) En déduire, sans plus de calcul que A et C sont inversibles et préciser leurs inverses

Exercice IV

$$\text{Soit la matrice } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^3 - A$
2. En déduire que A est inversible et déduire A^{-1}

Exercice V

$$\text{Soit la matrice } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3
2. Calculer $A^3 - A^2 + A - I_3$
3. Donner l'inverse de A en fonction de A^2 , A et I_3
4. Calculer A^4
5. Quel est l'inverse de A^2 ? ce lui de A^3 ?

Exercice VI

Calculer l'inverse de matrices suivantes par la méthode de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice VII

On considère les matrices suivantes :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 11 \\ -3 & 6 & 5 \\ -6 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice $B=TA$ et calculer le déterminant de B .
2. Dédire de la question précédente le déterminant de A .
3. Dédire de la question précédente le déterminant de

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 55 \\ -9 & -3 & 25 \\ -18 & -6 & 40 \end{pmatrix}$$

Exercice VIII

Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -7 \end{vmatrix}, \quad D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$D_6 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad D_7 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a & b & c \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix} \quad \text{ou } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Exercice IX

- 1) Calculer le déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

- 2) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $f \in L(E)$ tel que $f^2 = -\text{Id}$. Que dire de la dimension de E ?

Exercice X

Montrer sans développer que $D = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$

Exercice XI

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de $3A - 6I_3$ sachant que $A^2 = 4A - 3I_3$ et que ce déterminant est positif.