

Institut Supérieur du Numérique
Algèbre II / Série 2

Exercice I

Dire si les applications suivantes, sont des applications linéaires?

1. $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \rightarrow (x + y, x - 2y, 0)$;
2. $f_2: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z, t) \rightarrow (x - z + 2t, 2z - x + 2t - 3y, y + z - 2t + 3)$
3. $f_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \rightarrow (2x + 3yz, x - 2y, z - x)$;
4. $f_4: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]; P \rightarrow P'$;
5. $f_5: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]; P \rightarrow P^2$;
6. $f_6: C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \varphi(x) \rightarrow \int_0^x \varphi(t) dt$
7. $f_7: C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \varphi(x) \rightarrow (\varphi(x))^2$;

Exercice II

Soit l'application linéaire:

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ telle que } f(x, y, z, t) = (-3y + 2z + t, x + 3t, x - y + z + 3t, y - z)$$

Trouver Imf et Kerf

Exercice III

Soit l'application linéaire $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \rightarrow (x + y, x - y, x + y)$

Déterminer le noyau de f, son image. f est-elle injective? Surjective?

Exercice IV

Soit l'application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, (x, y, z) \rightarrow (x + z, y - z, z + y, x + y + 2z)$

1. Déterminer une base de Im(f)
2. Déterminer une base de ker(f)
3. L'application f est-elle injective? surjective?

Exercice V

Soit $B_1\{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$ et $B_2\{(1, 4, 2); (4, 1, 0); (6, 0, 0)\}$ deux familles de $\mathbb{R}^3$

- i) Montrer que B_2 est une base de $\mathbb{R}^3$
- ii) Donner la matrice de passage de B_1 à B_2

Exercice VI

Déterminer relativement aux bases canoniques la matrice A de l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(1, -1) = (-1, -2, 5)$ et $f(2, -3) = (0, 5, 4)$

Exercice VII

Soit l'application linéaire:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ telle que } f(x, y, z) = (x - y - 2z, 3x - 2y + z)$$

Et soient $v_1 = (1, 1, -2), v_2 = (0, 1, -1), v_3 = (3, 1, 0)$ trois vecteur de $\mathbb{R}^3$

1. Vérifier que $v = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de f quand $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis de leur base canonique
3. Écrire la matrice de f quand $\mathbb{R}^3$ est muni de la base v et $\mathbb{R}^2$ de sa base canonique.
4. Écrire la matrice de f quand $\mathbb{R}^3$ est muni de la base v et $\mathbb{R}^2$ de la base $w = \{w_1, w_2\}$ avec $w_1 = (1, 1)$ et $w_2 = (-1, 2)$