

Notes du cours de :
Probabilités
1ère année de Sup'Num

Sidi Mohamed MAOULOU

March 6, 2022

Contents

1	Rappel sur les ensembles	3
2	Dénombrement : différents modes de tirage	5
3	Notion de probabilité	9
3.1	Espace fondamental	9
3.2	Événements	9
3.3	Probabilité	10
4	Probabilité conditionnelle et Indépendance	11
4.1	Probabilité conditionnelle	11
4.2	Indépendance	12
5	Variables aléatoires	14
5.1	Rappel	14
5.2	Définitions Variable	14
5.3	Distribution d'une variable aléatoire	14
5.3.1	Fonction de répartition	14
5.3.2	Fonction de masse et de densité	15
5.4	Caractéristique de distribution d'une variable aléatoire	15
5.4.1	Espérance mathématique et variance	15
5.4.2	Propriétés.	16
5.5	Lois usuelles discrètes	16
5.5.1	Loi de Bernoulli	16
5.5.2	Loi binomiale	16
5.5.3	Loi géométrique	16
5.5.4	Loi hypergéométrique	17

1 Rappel sur les ensembles

Dans tout ce qui suit les ensembles considérés sont tous supposés inclus dans un ensemble donné Ω . L'ensemble des parties de Ω , sera noté $\mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subset \Omega\}$.

Inclusion : A est dit inclus dans B et on note $A \subseteq B$ si et seulement $\forall x \in \Omega (x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Égalité : $A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$

Réunion : de A et de B , noté $A \cup B$, (lire “ A union B ”), est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B . $A \cup B = \{x \in \Omega | (x \in A) \text{ ou } (x \in B)\}$, c'est-à-dire que :

$$x \in A \cup B \text{ si et seulement si } x \in A \text{ ou } x \in B.$$

La réunion d'une famille d'ensembles $\{(E_i)_{i \in I}\}$ est définie par :

$$\bigcup_{i \in I} E_i = \{x \in \Omega | \exists i \in I, x \in E_i\}.$$

Propriétés

- **associativité :** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- **commutativité :** $A \cup B = B \cup A$;
- **idempotence :** $A \cup A = A$;
- **$\emptyset$ est neutre :** $A \cup \emptyset = A$;
- **Ω est absorbant :** $\Omega \cup A = \Omega$.

Intersection : de A et de B , noté $A \cap B$, (lire “ A inter B ”), est l'ensemble des éléments appartenant à A et à B . $A \cap B = \{x \in \Omega | (x \in A) \text{ et } (x \in B)\}$, c'est-à-dire que :

$$x \in A \cap B \text{ si et seulement si } x \in A \text{ et } x \in B.$$

L'intersection d'une famille d'ensembles $\{(E_i)_{i \in I}\}$ est définie par :

$$\bigcap_{i \in I} E_i = \{x \in \Omega | \forall i \in I, x \in E_i\}.$$

Propriétés

- **associativité :** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- **commutativité :** $A \cap B = B \cap A$;
- **idempotence :** $A \cap A = A$;
- **Ω est neutre :** $A \cap \Omega = A$;
- **$\emptyset$ est absorbant :** $\emptyset \cap A = \emptyset$.

Complémentaire de A est l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A ; Il est noté A^c , $A^c = \{x \in \Omega | x \notin A\}$ c'est-à-dire que

$$x \in A^c \text{ si et seulement si } x \in \Omega \text{ et } x \notin A.$$

Le passage au complémentaire inverse la relation d'inclusion : $A \subset B$ si et seulement si $B^c \subset A^c$

On a les propriétés suivantes combinant la réunion, l'intersection et le complémentaire

- distributivité de l'intersection par rapport à la réunion

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cap \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

- distributivité de la réunion par rapport à l'intersection:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cup \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$$

- Lois de Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$\left(\bigcup_{i \in I} E_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} E_i^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} E_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} E_i^c$$

Le produit cartésien

- Soient A et B deux ensembles. On appelle produit cartésien de A et B l'ensemble, noté $A \times B$ et défini par

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

- Plus généralement, On note par

$$E_1 \times \cdots \times E_k = \{(x_1, \cdots, x_k) | x_i \in E_i, \forall i = 1, \cdots, k\}$$

- On note $E^n = E \times \cdots \times E$
- $A \times \emptyset = \emptyset$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $(A \times A') \cap (B \times B') = (A \cap B) \times (A' \cap B')$
- $(A \times A') \cup (B \times B') \subset (A \cup B) \times (A' \cup B')$

Le cardinal

- Lorsqu'un ensemble A est fini, le nombre d'éléments est appelé cardinal de A et est noté $\#A$,
- $\#\emptyset = 0$
- $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$
- Si $A \cap B = \emptyset$ alors $\#(A \cup B) = \#A + \#B$
- $\#(A \times B) = (\#A) \cdot (\#B)$
- $\#(E^k) = (\#E)^k$

2 Dénombrement : différents modes de tirage

Considérons une urne qui contient N boules discernables par exemple numérotés de 1 à N . L'expérience aléatoire à modéliser est le tirage de n boules dans cette urne. On note par E l'ensemble des boules dans l'urne, $E = \{1, 2, \dots, N\}$. Le tirage peut s'effectuer de trois manières différentes :

- **Tirage successif avec remise.** Dans ce mode de tirage on tire une boule et on la remet dans l'urne puis on tire la suivante et on la remet jusqu'à tirer n boules. Donc ici l'ordre dans lequel les boules sont tiré est important et les boules tirées peuvent se répéter. L'espace fondamental associé à ce mode de tirage est

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in E, \forall 1 \leq i \leq n\} = E^n.$$

et on a $\#\Omega_1 = \#(E^n) = (\#(E))^n = N^n$

Il s'agit du nombre de possibilités de choisir n boules parmi N lorsqu'on prend en considération l'ordre et la répétition

- **Tirage successif sans remise.** Dans ce mode de tirage on tire les n boules une à une sans les remettre dans l'urne. Donc ici $n \leq N$. L'ordre dans lequel les boules sont tiré est important mais les boules tirées ne peuvent pas se répéter. L'espace fondamental associé à ce mode de tirage est

$$\Omega_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in E, x_i \neq x_j \forall i \neq j\}$$

et on a

$$\#\Omega_2 = N(N-1)\dots(N-(n-1)) = \frac{N!}{(N-n)!} := A_N^n.$$

En effet, cela peut se montrer par récurrence sur n :

Si $n = 1$ alors $\Omega_2 = \{x : x \in E\} = E$. Donc $\#(\Omega_2) = \#(E) = N$.

Supposons le résultat vrai pour n et montrons le pour $n+1$. Ceci est vrai car le nombre des tirages possibles de $n+1$ boules est égal au nombre des tirages possibles de n boules multiplié par le nombre de tirage d'1 boule de l'urne contenant à présent que $N-n$ boules (car n ont déjà été tirés).

Remarque Le nombre A_N^n est le nombre des arrangements de n parmi N . Si $n = N$ c'est le nombre des permutations de l'ensemble E qu'on note $\sigma(E)$, et $\#(E) = N!$.

- **Tirage simultané (ou exhaustif)** Dans ce mode les n boules sont tirées en une fois. Ici $n \leq N$, l'ordre n'importe pas et les boules ne peuvent pas se répéter. L'espace fondamental associé à ce mode de tirage

$$\Omega_3 = \{A \subset E : \#(A) = n\} := \mathcal{P}_n(E)$$

est l'ensemble de toutes les parties de E de n éléments.

et on a

$$\#\Omega_3 = \frac{N!}{(N-n)!n!} = C_N^n$$

En effet, posons $K = \#(\Omega_3)$. Ainsi, en posant $\Omega_3 = \{A_1, \dots, A_K\}$ (les A_i sont distincts), il en résulte que $\Omega_2 = \sigma(A_1) \cup \dots \cup \sigma(A_K)$ et par conséquent,

$$\#(\Omega_2) = \sum_{i=1}^K \#(\sigma(A_i))$$

Comme pour tout i , $\#(A_i) = n$ alors $\#(\sigma(A_i)) = n!$. Ainsi, on

$A_N^n = Kn!$ et par conséquent $\#(\Omega_3) = K = A_N^n/n! = C_N^n$.

Remarque. L'ensemble Ω_3 est noté $\mathcal{P}_n(E)$ pour l'ensemble de parties de E de cardinal

n . Le nombre C_N^n s'appelle le nombre des combinaison de n parmi N .

Le cardinal de l'ensemble des parties de E est égale à la somme des cardinaux des ensembles de cardinal n pour $n = 1$ à N . Il en résulte du binôme de Newton que

$$\#(\mathcal{P}(E)) = \sum_{n=0}^N C_N^n = 2^N$$

- **Tirage avec répétition sans ordre.** Parmi les quatre possibilités que nous avons énumérées pour l'échantillonnage ordonné/non ordonné avec/sans remise, l'échantillonnage non ordonné avec remise est le plus difficile. Supposons que nous voulions échantillonner à partir de l'ensemble $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ k fois de sorte que la répétition soit autorisée et que l'ordre n'ait pas d'importance. Par exemple, si $A = \{1, 2, 3\}$ et $k = 2$, alors il y a 6 façons différentes de le faire : 1,1 ; 1,2 ; 1,3 ; 2,2 ; 2,3 ; 3,3 ;

Comment peut-on obtenir le chiffre 6 sans réellement lister toutes les possibilités ? Une façon de penser à cela est de noter que n'importe laquelle des paires de la liste ci-dessus peut être représentée par le nombre de 1, 2 et 3 qu'elle contient. Autrement dit, si x_1 est le nombre de uns, x_2 est le nombre de deux et x_3 est le nombre de trois, nous pouvons représenter de manière équivalente chaque paire par un vecteur (x_1, x_2, x_3) , c'est-à-dire,

$1, 1 \rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 0)$; $1, 2 \rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$ etc. Notez qu'ici $x_i \geq 0$ sont des entiers et $x_1 + x_2 + x_3 = 2$. Ainsi, nous pouvons affirmer que le nombre de façons dont nous pouvons échantillonner deux éléments de l'ensemble $A = \{1, 2, 3\}$ de telle sorte que l'ordre n'a pas d'importance et que la répétition soit autorisée est le même que les solutions de l'équation suivante $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, où $x_i = 0, 1, 2$. En généralisant on a pour k et n le nombre de façons de choisir k parmi n avec répétition et sans ordre est égal au nombre de solution de l'équation : $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$, où $x_i = 0, 1, \dots, k$. Pour dénombrer le nombre de possibilités on recourt à l'astuce suivante : $1 \rightarrow |$, $2 \rightarrow ||$, $3 \rightarrow |||$ ainsi de suite. On écrit donc $x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 1 + 0 = 2 = | + | +$ nous avons une représentation unique utilisant des lignes verticales (|) et des signes plus (+). En effet, chaque solution peut être représentée par k lignes verticales et $n - 1$ plus des signes. Il en résulte donc le nombre de possibilités est égal au nombre de séquences distinctes que nous pouvons faire en utilisant k lignes verticales | et $n - 1$ signes plus + à savoir $C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}$.

Exemples.

- 1) Le lancer d'un dé à six faces peut être vu comme un tirage d'une boule dans une urne contenant 6 boules. Donc $\#(\Omega) = 6$
- 2) Le lancer de 2 dés discernable peut être vu comme un tirage successif avec remise de 2 boules dans une urne contenant 6 boules. Donc $\#(\Omega) = 6^2 = 36$
- 3) La combinaison d'une serrure à 3 chiffres peut être regardée comme un tirage avec remise de 3 boules d'une urnes contenant 10 numérotés de 0 à 9. Donc $\#(\Omega) = 10^3 = 1000$.
- 4) Le tirage simultané de n d'une urne contenant N_1 boules blanches et N_2 boules noires peut être regardée de la manière suivante : pour $k = 0$ à n on effectue deux tirages simultanés :

- le premier de k boules dans urne contenant les N_1 boules blanches
- le second de $n - k$ boules dans une urne contenant les N_2 boules noires

Il en découle que

$$C_{N_1+N_2}^n = \sum_{k=0}^n C_{N_1}^k C_{N_2}^{n-k}.$$

Le terme $C_{N_1}^k C_{N_2}^{n-k}$ correspond au nombre des possibilité de tirer k boules blanches et $n - k$ boules noires. Il s'en suit que si, B est l'événement "Parmi le n boules tirées, il y exactement k

boules blanches", alors

$$\#(B) = C_{N_1}^k C_{N_2}^{n-k}.$$

5) Dans un jeu de 32 cartes, une main de 8 cartes un tirage simultané de 8 parmi 32. Supposons que l'on cherche à calculer la le nombre de possibilités d'avoir $B =$ " la main contient exactement 2 as" et

$$\#(B) = C_4^2 C_{28}^6.$$

Exercice. (Les probabilités au Poker)

Considérons un jeu de 52 cartes de hauteurs $\{As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R\}$ de 4 couleurs $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$. Une main est un ensemble de 5 cartes choisies parmi ce jeu. On définit les mains suivantes :

- 1) Une paire : Une main constitue une paire quand deux cartes sont de même hauteur alors que les hauteurs des 3 autres sont toutes différentes et différentes de celle des cartes qui constituent la paire.
- 2) Deux paires : Une main constitue deux paires quand deux cartes sont de même hauteur, deux autres cartes de même hauteur mais de hauteur différente de celle de la première paire et que la dernière carte est de hauteur différente de celle présente dans les deux paires.
- 3) Breton : Une main constitue un breton quand trois cartes sont de même hauteur alors que les hauteurs des deux autres sont différentes et différentes de celle des cartes qui constituent le breton.
- 4) Flush : Une main constitue un flush quand les 5 cartes sont de la même couleur.
- 5) Full : Une main constitue un full quand trois cartes sont de même hauteur et les deux autres cartes sont aussi de même hauteur. Autrement dit un full est à la fois un breton et une paire.
- 6) Carré : Une main constitue un carré quand quatre cartes sont de même hauteur.
- 7) Quinte flush : Une main constitue une quinte flush quand les 5 cartes sont de la même couleur et de hauteurs consécutives. L'as peut être utilisé comme carte de plus petite hauteur mais aussi comme carte de plus grande hauteur.
- 8) Quinte flush royale : Une main constitue une quinte flush royale si elle contient : As, Roi, Dame, Valet et 10 de même couleur.

Calculer le nombre de possibilités d'avoir ces différentes mains.

Solution

Tout d'abord commençons par modéliser l'expérience. Le jeu de cartes est considéré comme urne E de 52 cartes (boules) qui peut être (selon le cas) diviser en 2 ou plusieurs groupes. L'ensemble de main est donné par $\mathcal{P}_5(E)$ et son cardinal est C_{52}^5

1) Une paire est caractérisée par la hauteur de la paire, les couleurs de 2 cartes constituant cette paire et le choix de 3 autre cartes de tel façon qu'elle soient toutes de hauteurs différentes entre elles et différentes de celle de la paire. Commençons par le choix de la hauteur de la paire il y a 13 hauteurs possibles. Pour une hauteur donnée il y a C_4^2 (2 couleurs parmi 4) couleurs possibles pour les deux cartes constituant la paire. Maintenant pour une paire donnée, il y a $C_1 2^3$ (choix de 3 parmi 12=nombre des hauteur moins 1 pour la hauteur de la paire) possibilités pour les hauteurs des 3 autres cartes et il y 4^3 possibilités pour leur couleurs. D'où

$$\#(paire) = 13 \times C_4^2 \times C_{12}^3 \times 4^3$$

2) Une main de deux paires est caractérisée par les 2 hauteurs de deux paires (il y C_{13}^2) les couleurs de des cartes constituant chaque paires (il y a $C_4^2 \times C_4^2$) Une fois les deux paires choisies il reste $4(13-2)=44$ possibilités pour la dernière cartes. D'où

$$\#(2 paires) = C_{13}^2 \times C_4^2 \times C_4^2 \times 44$$

3) Un breton est caractérisé par la hauteur du breton (13 possibilités), choix des couleurs des cartes constituant le breton (C_4^3 possibilités) choix des hauteurs de 2 autres cartes ($C_1 2^2$) et de leurs couleurs 4^2 . D'où

$$\#(Breton) = 13 \times C_4^3 \times C_{12}^2 \times 4^2$$

4) Un flush est caractérisé par sa couleur (4 possibilités) et du choix des hauteurs de ses cartes (C_{13}^5). D'où

$$\#(Flush) = 4 \times C_{13}^5$$

5) Un full est caractérisé par la hauteur de son brelan (13 possibilités), les couleurs de son brelan (C_4^3 possibilité) la hauteur de sa paire (12 possibilités) et les couleurs de la paire (C_4^2 possibilités). D'où

$$\#(Full) = 13 \times C_4^3 \times 12 \times C_4^2$$

6) Un carré est caractérisé par sa hauteur (13 possibilités) et du choix de l'autre carte (12×4 possibilités). D'où

$$\#(Carre) = 13 \times 12 \times 4$$

7) Une quinte flush est caractérisée par sa couleur (4 possibilités) et de sa plus petite carte 10 possibilités (car l'as a un double rôle). D'où

$$\#(Quinte Flush) = 4 \times 10$$

8) Une quinte flush royal est caractérisée par sa couleur 4 possibilités

$$\#(Quinte Flush Royale) = 4$$

3 Notion de probabilité

3.1 Espace fondamental

Définition 1. Une expérience aléatoire est expérience qui peut être répétée théoriquement aussi souvent que l'on veut, dans des conditions fixées, dont on connaît l'ensemble des résultats possibles mais dont on ne peut prédire avec certitude le résultat que l'on obtiendra.

Définition 2. L'espace fondamental d'une expérience est l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience.

Exemples.

- 1) Le lancer d'un dé à six face : $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$.
- 2) Le lancer d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{Pile, Face\}$.
- 3) On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir Face. Les résultats possibles de cette expérience sont les nombres de fois où on a lancé la pièce : $\Omega = \mathbb{N}^*$.
- 4) La durée de vie d'un être vivant : $\Omega = \mathbb{R}_+$.
- 3) La trajectoire d'une feuille morte sur une surface d'eau plane D pendant un temps T : $\Omega = \mathcal{C}([0, T], D)$

3.2 Événements

Définition 3. On appelle $\mathcal{P}(\Omega)$ la tribu triviale d'événements définie sur Ω . Tout élément de cette tribu est appelé événement

Vocabulaire

- Si A est un événement, pour chaque résultat ω de l'expérience aléatoire,
 - ou bien $\omega \in A$: Dans ce cas on dit que A est réalisé.
 - ou bien $\omega \notin A$: on dit que A n'est pas réalisé.
- La non-réalisation de A est appelé la réalisation de l'événement contraire de A .
- La réalisation simultanée de deux événements A et B (A et B) est l'événement $A \cap B$.
- La réalisation d'au moins un des deux événements A et B (A ou B) est l'événement $A \cup B$.
- Si A et B sont deux événements tels que $A \subset B$, on dit que l'événement A entraîne (ou implique) l'événement B .
- Le singleton $\{\omega\}$ est appelé événement élémentaire.
- Ω est l'événement certain.
- $\emptyset$ est l'événement impossible.
- Deux événements A et B dont la réalisation simultanée est impossible ($A \cap B = \emptyset$) sont dits incompatibles. Dans ce cas A et B sont dits mutuellement exclusifs.
- des événements dont l'union donne l'espace fondamental sont dits collectivement exhaustifs

3.3 Probabilité

Définition 4. : On appelle probabilité une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$ ayant les propriétés suivantes :

ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

iii) Pour toute suite $(A_n)_{n \geq 1}$ d'événements deux à deux incompatibles,

$$\mathbb{P}(\cup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) \quad (\sigma\text{-additivité}).$$

Exemple. Probabilité uniforme.

Si Ω est fini la probabilité uniforme est définie par

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Propriétés:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

2. Pour tout événement A on a $\mathbb{P}(A) \leq 1$.

3. Additivité de $\mathbb{P}$: si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n événements deux à deux incompatibles, alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(A_n).$$

4. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

5.

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

6.

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

7. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

8. $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

4 Probabilité conditionnelle et Indépendance

4.1 Probabilité conditionnelle

Définition 5. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une espace de probabilité et B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B , le réel

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Proposition 1. (Formule des probabilités composées)

- Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$ alors, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B).$$

- Plus généralement, soit $A_1, \dots, A_n$ tel que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \dots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Définition 6. On appelle système d'événements complet toute famille $(B_n)_{n \in I}$, où $I \subset \mathbb{N}$ fini ou dénombrable, tel que

- pour tout n , $\mathbb{P}(B_n) \neq 0$.
- les événements B_n sont deux à deux incompatibles (mutuellement exclusifs)
- $\cup_{n \in I} B_n = \Omega$ (collectivement exhaustifs)

Proposition 2. Formule des probabilités totales (FPT)

Soit $(B_n)_{n \in I}$ un système d'événements complet alors pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \sum_{n \in I} \mathbb{P}(A \cap B_n) \quad (\text{FPT 1ère forme}) \\ &= \sum_{n \in I} \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n) \quad (\text{FPT 2ème forme}) \end{aligned}$$

Exemple

- Soit $B \in \mathcal{A}$ tel que $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Alors pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)$$

- On considère n urnes telles que l'urne numéro i contient i boules blanches et $n - i$ boule noire. On choisit au hasard une urne et on en tire 1 boule. Qu'elle est la probabilité qu'elle soit blanche? On pose B_i l'événement "l'urne numéro i est choisie" et A l'événement "on tire une boule blanche". La famille $(B_i)_{i=1}^n$ constitue un système d'événements complet. On a alors

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

Le choix de l'urne étant au hasard les événements B_i sont équiprobables et $\mathbb{P}(B_i) = 1/n$. Sachant qu'on a choisit l'urne numéro i la probabilité de tirer une boule blanche est alors $\mathbb{P}(A|B_i) = i/n$. D'où

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

Proposition 3. *Formule de Bayes Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. Alors*

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A) \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Soit $(B_n)_{n \in I}$ un système d'événements complet. Alors pour tout événement $A \in \mathcal{A}$ on a

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{n \in I} \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n)}$$

Exemple Reprenons l'exemple précédent. Sachant qu'on a tiré une boule blanche, quelle est la probabilité d'avoir choisis l'urne numéro i ? On a

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \mathbb{P}(A|B_i) \frac{\mathbb{P}(B_i)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{i}{n} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n(n+1)}{2n^2}} = \frac{2i}{n(n+1)}.$$

A retenir :

- La notion de probabilité conditionnelle s'introduit naturellement chaque fois qu'on acquiert une information partielle sur le résultat d'une expérience aléatoire.
- Elle s'utilise aussi lorsqu'on se livre à deux expériences aléatoires successives telles que les conditions de la seconde sont fonction du résultat de la première.

4.2 Indépendance

Définition 7. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.*

- *Deux événements A et B sont dits indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.*
- *Soit $(A_n)_{n \in I}$, $I \subset \mathbb{N}$ fini ou non. On dit que la famille $\{A_n\}$ est mutuellement indépendante si pour tout $J \subset I$*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)$$

Exemple. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Les événements A = "c'est un pique" et B = "c'est un numéro" sont indépendants.

En effet, l'ensemble fondamental Ω est l'ensemble des 32 cartes : 8 cartes (as-roi-dame-valet-10-9-8-7) pour chacune des 4 couleurs ($\spadesuit$ -pique, $\heartsuit$ -cœur, $\diamondsuit$ -carreau, $\clubsuit$ -trèfle). On munit Ω de la probabilité uniforme puisque le tirage se fait au hasard, d'où

$$\mathbb{P}(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

Il y a 16 numéro (10- 9 -8-7 de chaque couleur), donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

Enfin il y a 4 numéro de pique, donc

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Propriétés. Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. Les trois conditions sont équivalentes :

- i) A et B sont indépendants
- ii) $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$
- iii) $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$

Remarque. Les propriétés *ii)* et *iii)* justifient le terme indépendants. En effet la probabilité d'un événement n'est pas modifiée par le fait que l'on sache un événement indépendant réalisé.

Propriétés Si A et B sont deux événements indépendants, alors

- A et B^c sont indépendants
- A^c et B sont indépendants
- A^c et B^c sont indépendants

Propriétés Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ une famille mutuellement indépendante et soit B_i tel que $B_i = A_i$ ou $B_i = A_i^c$. Alors la famille $\{B_i\}_{i \in I}$ est mutuellement indépendante.

5 Variables aléatoires

Tout au long de chapitre des lettres majuscules comme $X, Y, Z, \dots$ seront utilisées pour désigner de variables aléatoires et des lettres minuscules comme $x, y, z, \dots$ seront utilisées pour désigner valeurs que peut prendre les variables aléatoires

5.1 Rappel

- **Binôme de Newton** : $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$

- **Suite géométrique** :

$$- \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$- \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$$

$$- \sum_{k=n}^{+\infty} q^k = \frac{q^n}{1 - q}$$

- **Exponentielle** : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

5.2 Définitions Variable

Définition 8. Une variable aléatoire est une fonction X qui associe à chaque résultat d'une expérience aléatoire un nombre réel

Exemples.

- On lance une pièce de monnaie 3 fois de suite. L'espace fondamental associé à cette expérience est $\{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$. Si X désigne le nombre de Pile obtenu alors $X(PPP) = 3, X(PPF) = 2, X(PFP) = 2, X(PFF) = 1, X(FPP) = 2, X(FPF) = 1, X(FFP) = 1$ et $X(FFF) = 0$ Ici l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable X est $\{0, 1, 2, 3\}$.
- On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir Pile. Soit X est le nombre de lancers effectués. X est une variable aléatoire. L'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre est $\mathbb{N}^*$.

Définition 9. Soit X une variable aléatoire. On note par $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X . Si $X(\Omega)$ est de la forme $\{x_i | i \in I\}$ ou I est une partie de $\mathbb{N}$, alors on dit que X est discrète. Dans ce cours on étudiera uniquement les variables discrètes

5.3 Distribution d'une variable aléatoire

5.3.1 Fonction de répartition

Définition 10. Soit X une v.a.. On appelle fonction de répartition de X , noté F_X , la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0, 1]$ tel que $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Ici $(X \leq x) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\}$

Propriétés.

1. La fonction de répartition F_X est croissante et à valeurs dans $[0, 1]$.

2. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$
4. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$.
5. F_X est une fonction en escalier.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - \lim_{y \rightarrow x^-} F_X(y)$

5.3.2 Fonction de masse et de densité

Définition 11. Soit X une v.a.

La fonction $p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ est appelée fonction de masse de la v.a. discrète X .

Propriétés.

- $0 \leq p_X(x) \leq 1$
- $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq x \leq b} p_X(x)$
- $\sum_{x \in X(\Omega)} p_X(x) = 1$

5.4 Caractéristique de distribution d'une variable aléatoire

Il est intéressant de définir des quantités permettant de décrire les caractéristiques principales d'une distribution. Ceci facilite la comparaison de distributions entre elles. Quand nous travaillerons au niveau de l'échantillon, il arrivera que l'on ne connaisse pas nécessairement les distributions impliquées, pourtant les mesures caractéristiques pourront toujours être estimées à partir de l'échantillon.

5.4.1 Espérance mathématique et variance

Définition 12. Soient X un v.a. l'espérance mathématique (ou moyenne) de X est donnée par

$$E[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} xp_X(x)$$

la variance de X est donnée par

$$V(X) = E[(X - E(X))^2]$$

Notes.

- La racine de la variance s'appelle l'écart-type
- Pour le calcul de la variance on utilise souvent la formule $\sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2$
- σ/μ est appelée coefficient de variation qui sert à décrire l'importance relative de variation de la variable aléatoire.

5.4.2 Propriétés.

1. $E[aX] = aE[X]$
2. $E[aX + b] = aE[X] + b$
3. $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$
4. $V(aX + b) = a^2V(X)$
5. $E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$

5.5 Lois usuelles discrètes

Soit $p \in]0, 1[$ et $\lambda > 0$

5.5.1 Loi de Bernoulli

On appelle une épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire admettant deux résultats possible un échec ou un succès telle que la probabilité du succès est égale à $p \in]0, 1[$. Soit X la variable aléatoire égale à 1 si le résultat de l'épreuve est un succès et 0 sinon. On a donc

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \text{ et on a } p_X(0) = \mathbb{P}(X = 1) = p \text{ et } p_X(1) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p et on note $X \rightsquigarrow \text{Ber}(p)$.

Pour une variable X qui suit une loi Bernoulli de paramètre p , on a

$$E(X) = p \text{ et } \sigma_X^2 = p(1 - p)$$

5.5.2 Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer n épreuve de Bernoulli indépendantes. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus à l'issu de cet expérience. L'ensemble des valeurs possibles pour X est alors

$$X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\} \text{ et on a } p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \text{ pour } k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

On dit alors X suit une loi binomiale de paramètre n et p et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Pour une variable X qui suit une loi binomiale de paramètre n et p , on a

$$E(X) = np \text{ et } \sigma_X^2 = np(1 - p)$$

Propriété. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ et X et Y indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$

A retenir! Le nombre de succès lors de n épreuves indépendantes suit une loi binomiale.

Remarque. Une loi de Bernoulli est une loi binomiale avec $n = 1$

5.5.3 Loi géométrique

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer une suite d'épreuve de Bernoulli indépendantes. Soit X la variable aléatoire égale au rang du premier succès obtenu (ou nombre d'épreuves pour avoir un succès). L'ensemble des valeurs possibles pour la variable X est

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et on a } \mathbb{P}(X = n) = p(1 - p)^{n-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

On dit que X suit une loi géométrique de paramètre p et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{Geo}(p)$.

Pour une variable X qui suit une loi géométrique de paramètre p , on a

$$E(X) = 1/p \text{ et } \sigma_X^2 = (1 - p)/p^2$$

A retenir! Le nombre d'épreuve pour obtenir le premier succès suit une loi géométrique.

5.5.4 Loi hypergéométrique

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer un tirage simultané de n boules dans une urne qui contient N_1 boules blanche et N_2 boule noire. Soit X la variable aléatoire égale au nombre des boules blanches tirées. L'ensemble des valeurs possibles pour X est

$$X(\Omega) = \{0, \dots, n\} \text{ et on a } \mathbb{P}(X = k) = \frac{C_{N_1}^k C_{N_2}^{n-k}}{C_{N_1+N_2}^n}.$$

On dit que X suit une loi hypergéométrique de paramètres N_1, N_2, n et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{H}(N_1, N_2, n)$.

Pour une variable X qui suit une loi hypergéométrique de paramètre N_1, N_2 et n , on a

$$E(X) = n \frac{N_1}{N_1 + N_2} \text{ et } \sigma_X^2 = n \frac{N_1}{N_1 + N_2} \left(1 - \frac{N_1}{N_1 + N_2}\right) \left(\frac{N_1 + N_2 - n}{N_1 + N_2 - 1}\right)$$