

Correction CC1 (SUPNUM)

Ex1:

- ① Il s'agit d'une permutation de 8 personnes donc le nb de possibilités est de $\boxed{8!}$
- ② On considère les personnes A et B comme étant une seule personne que l'on note AB on obtient donc $7!$ possibilités pour les quelles la personne A est assise avant B. Il y a aussi $7!$ pour les quelle B est avant A. le nombre de possibilités est donc $\boxed{2 \times 7!}$

Ex2:

Soit A: "l'employé connaît Fortran" B: "l'employé connaît C/C++"
on a: $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,6$ et $P(A \cap B) = 0,5$.

$$\textcircled{1} P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,5}{0,7} = \boxed{5/7}$$

$$\textcircled{2} P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,5}{0,6} = \boxed{5/6}$$

③ a) On pose C "le problème est résolu" on a:

$\{A \cap \bar{B}, \bar{B} \cap A, A \cap B \text{ et } \bar{A} \cap \bar{B}\}$ constituent un S.E.C

$$\text{Donc } P(C) = P(C|A \cap \bar{B})P(A \cap \bar{B}) + P(C|A \cap B)P(A \cap B) + P(C|\bar{A} \cap \bar{B})P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

or d'après l'énoncé $P(C|A \cap \bar{B}) = 0,6$; $P(C|\bar{A} \cap B) = 0,7$
et $P(C|A \cap B) = 0,8$ et $P(C|\bar{A} \cap \bar{B}) = 0$.

$$\text{de plus } P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,7 - 0,5 = 0,2$$

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,5 = 0,1$$

$$P(A \cap B) = 0,5$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ = 1 - (0,7 + 0,6 - 0,5) = 0,2$$

Ainsi on a: $P(C) = 0,6 \times 0,2 + 0,7 \times 0,1 + 0,8 \times 0,5 + 0 \times 0,2$
 $= \boxed{0,59}$

b) On cherche $P(A \cap B | C) = \frac{P(C | A \cap B)}{P(C)}$ (form. Bayes)
 $= \frac{0,8 \times 0,5}{0,59} = \frac{0,40}{0,59} = \boxed{\frac{40}{59}}$

Exo 3 :

On note S_i "Choisir le bon mot de passe à l'essai no i"

On a: $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

On a: $P(X=0) = P(S_1) = 1/5$

$P(X=1) = P(\bar{S}_1 \cap S_2) = P(\bar{S}_1) \cdot P(S_2) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4}$

$P(X=2) = P(\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2 \cap S_3) = P(\bar{S}_1) \cdot P(\bar{S}_2 | \bar{S}_1) \cdot P(S_3 | \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$

$P(X=3) = P(\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2 \cap \bar{S}_3 \cap S_4) = P(\bar{S}_1) \cdot P(\bar{S}_2 | \bar{S}_1) \cdot P(\bar{S}_3 | \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2) \cdot P(S_4 | \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2 \cap \bar{S}_3) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$

$= 1/5$
 De même $P(X=4) = 1/5$

x	0	1	2	3	4
$P_X(x)$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$

② $E(X) = \frac{1}{5}(0+1+2+3+4) = \boxed{2}$

$E(X^2) = \frac{1}{5}(0^2+1^2+2^2+3^2+4^2) = 6 \Rightarrow V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
 $= 6 - 4 = \boxed{2}$

③ le système ne se bloque pas si $X < 3$. Donc la probabilité que le système se bloque est

$P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) = 1/5 + 1/5 = \boxed{2/5}$

Ex 4 :

① Chaque essai est une épreuve de Bernoulli avec deux issues possibles "Conduit à un Beag" ou pas. Les résultats des tests sont indépendants. Donc le nombre de Beag est une variable binomiale de paramètres 20 et p : $X \sim B(20, p)$

② le nombre de beag attendu est $E(X) = 20p$.

③ Soit Y le nombre de beag dans les 2 premiers tests
 $Y \sim B(2, p)$, la probabilité d'avoir au moins un beag est

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \sum_{i=0}^0 p^i (1-p)^{2-0} \\ &= \boxed{1 - (1-p)^2} \end{aligned}$$

exo 5 :

① On a : à l'instant 0 l'urne contient 1 boule rouge. Après n tirage on risque d'ajouter au maximum n boules rouges. Donc $X_n(\Omega) = \{1, 2, \dots, n+1\}$

② On pose R_i "tirer une boule rouge au tirage i^{e} "

$$P(X_1 = 1) = P(\bar{R}_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(X_1 = 2) = P(R_1) = \frac{1}{2}$$

Donc la relation est vérifiée pour $n=1$

On suppose que cette relation est vérifiée pour $n-1$

$$\text{càd : } P(X_{n-1} = k) = \frac{1}{n} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Noter qu'après $(n-1)$ tirage l'urne contient $(n+1)$ boules et de plus si $X_{n-1} = k$ alors

on a : soit $X_n = k$ (dans le cas d'un tirage de boule verte)
soit $X_n = k+1$ (dans le cas d'un tirage de boule rouge)

le système $\{ (X_{n-1} = k) ; k = 1, 2, \dots, n \}$ constitue un S.E.C. Donc $\forall j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$

$$\begin{aligned}
 P(X_n = j) &= \sum_{k=1}^n P(X_n = j | X_{n-1} = k) P(X_{n-1} = k) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(X_n = j | X_{n-1} = k) \\
 &= \frac{1}{n} \left(P(X_n = j | X_{n-1} = j-1) + P(X_n = j | X_{n-1} = j) \right) \\
 &= \frac{1}{n} \left(\frac{j-1}{n+1} + \frac{n+1-j}{n+1} \right) \\
 &= \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \boxed{\frac{1}{n+1}} \quad \text{CQFD}
 \end{aligned}$$

explication:

$X_{n-1} = j-1$: l'urne à l'instant $n-1$ contient $(n+1)$ boules dont $j-1$ sont rouges donc la probabilité que le nombre de boules rouges augmente d'une unité est la probabilité de tirer une boule rouge donc $\frac{j-1}{n+1}$.

$X_{n-1} = j$: l'urne à l'instant $n-1$ contient $(n+1)$ boules dont j sont rouges et donc $n+1-j$ boules vertes. Ainsi la probabilité que le nombre de boules rouges reste le même est égale à la probabilité de tirer une boule verte donc $\frac{n+1-j}{n+1}$.