

Algèbre de Boole, Portes logiques de base, Représentation et Simplification des fonctions logiques

Cours Systèmes logiques

1^{ère} Année SupNum

Dr. MOHAMED SASS MOHAMDY

Plan du Cours

I – Algèbre de Boole

II – Portes logiques de base

III- Représentations des fonctions logiques

IV- Simplification des fonctions logiques

I - Algèbre de Boole

- Le terme Boole vient du nom du mathématicien anglais George Boole (1815-1864), **qui fit une analyse mathématique de la logique.**
- **Une variable dans l'algèbre de Boole, est une variable logique qui ne peut prendre que l'une de deux valeurs : 0 ou 1.**
- **L'ensemble des règles relatives au traitement de ces variables booléennes est appelé algèbre de Boole ou treillis booléen.**

Dans l'algèbre de Boole et sur l'ensemble E constitué des éléments {0,1}, Il existe une relation d'ordre $0 < 1$, et trois opérations de base :

- **La complémentation**, définie en Table 1 est une application de E sur E.
- **Les opérations union** (Table 2) appelée encore ou, max et qui est notée (+), **et intersection** (Table 3) appelée encore et, min, qui est notée (.) sont des applications de $E.E \rightarrow E$.

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Table 1 : complémentation

x	y	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Table 2 : Union, +, ou, max

x	y	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Table 3 : Intersection, ., et, min

Propriétés et règles de l'algèbre de Boole

Pour tout $a, b, c \in E$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

1) 0 est l'élément minimum, 1 est l'élément maximum

$$a \cdot 1 = a \quad \text{car } \min(a, 1) = a$$

$$a + 0 = a \quad \text{car } \max(a, 0) = a$$

$$a \cdot 0 = 0 \quad \text{car } \min(a, 0) = 0$$

$$a + 1 = 1 \quad \text{car } \max(a, 1) = 1$$

2) complément :

$$a \cdot \overline{a} = 0 \quad \text{car } \min(0, 1) = 0$$

$$a + \overline{a} = 1 \quad \text{car } \max(0, 1) = 1$$

3) Commutativité :

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a + b = b + a$$

car les fonctions min et max sont commutatives.

4) Associativité :

$$a.(b.c) = (a.b).c = a.b.c$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$$

car les fonctions min et max sont associatives.

5) Distributivité :

$$a.(b + c) = a.b + a.c$$

$$a + (b.c) = (a + b).(a + c)$$

Théorèmes Booléens

Théorème d'absorption :

$$X + X.Y = X$$

et $X(X + Y) = X$

Démonstration :

- Sortons le X, on trouve : $X(1 + Y) = X.1 = X$

Théorème d'adjacence :

$$X.Y + \overline{X}.Y = Y$$

$$(X + Y).(\overline{X} + Y) = Y$$

Démonstration :

- Sortons le Y, $(X + \overline{X})Y = Y$.

N.B :

L'adjacence est un théorème très utile pour réduire les expressions.

Théorème de MORGAN :

$$\overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}$$

$$\overline{a + b} = \bar{a} . \bar{b}$$

Démonstration :

La Table suivante, constitue une démonstration de ce théorème.

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	a.b	$\bar{a} . \bar{b}$	a+b	$\bar{a} + \bar{b}$	$\overline{a.b}$	$\overline{a + b}$
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0	0	0

II - Portes logiques de base

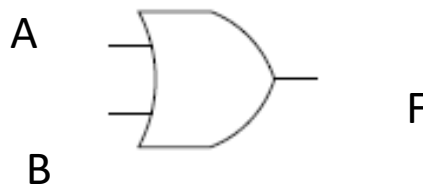
Les portes logiques OU (OR), ET (AND) et NOT sont les éléments de base à l'aide desquels nous pouvons exprimer toute fonction logique.

La porte OU (OR) :

L'opération OU appliquée à une ou plusieurs variables conduit à l'addition logique de ces variables (résumée dans la table suivante).

Elle est aussi appelée réunion et elle est notée par le signe U, ou plus simplement par +.

$$F = A + B$$

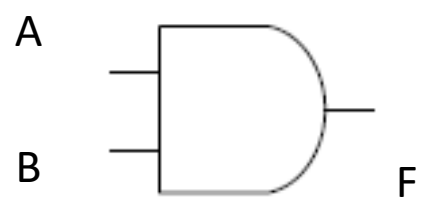


A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

La porte ET (AND) :

L'opération ET appliquée à une ou plusieurs variables conduit à l'addition logique de ces variables (résumée dans la table suivante). **Elle est aussi appelée intersection et elle est notée par le signe $\cap$, ou plus simplement par $(.)$.**

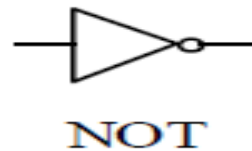
$F = A.B$



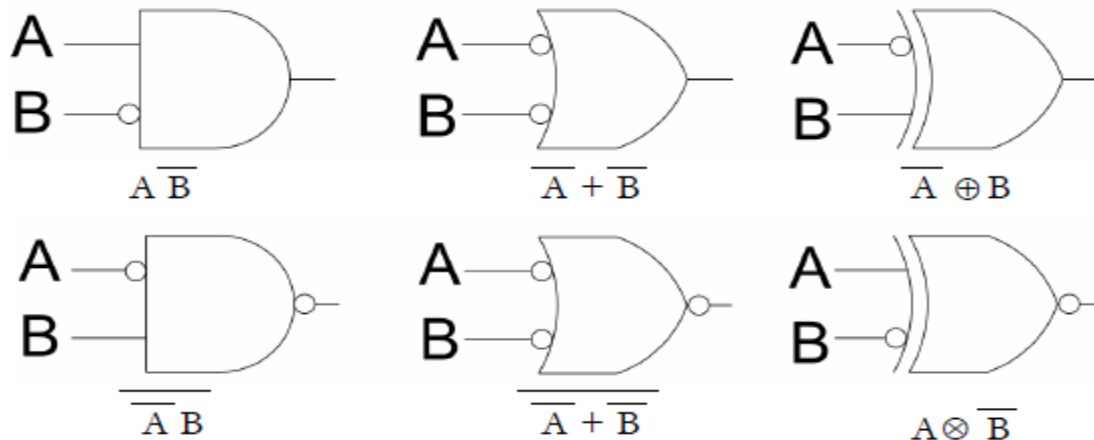
A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Inversion des entrées :

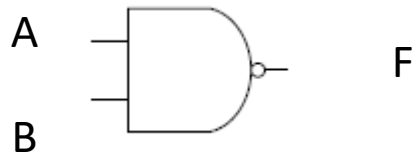
L'inverseur (NOT) correspond à la fonction complémentation. La représentation symbolique de cette porte est la suivante :



L'inversion peut être indiquée par la présence d'un cercle d'inversion. Ainsi, nous aurons la correspondance suivante :

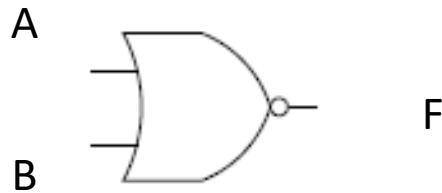


Porte NON ET (NAND) : $\overline{A \cdot B}$



A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Porte NON OU (NOR) : $\overline{A + B}$



A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

- Une question légitime qui se pose alors est : « Pourquoi disposons nous d'autant de portes logiques, puisque toute fonction logique peut être exprimée à l'aide des opérateurs ET, OU et NON ? »
- La raison principale est d'ordre technologique, tenant compte du fait que la réalisation d'une porte ET à l'aide de transistors présuppose l'existence d'une porte NON-ET, qui à son tour est inversée. La réciproque est tout aussi vraie pour la porte OU et la porte NON-OU.
- De la même façon, les portes XOR et XNOR sont très utiles et leur réalisation matérielle est plus simples que l'équivalent utilisant des portes ET, OU et NON.

Cette réalité va nous amener à la notion de coût d'un circuit.

Porte XOR :

La formulation logique de cette porte, correspond à un OU où les deux entrées ne peuvent être vraie en même temps.

La fonction XOR, symbolisée par $\oplus$, est donnée par l'expression :

$$A \oplus B = \overline{A} B + A \overline{B}$$
$$= (A+B)(\overline{A} + \overline{B})$$



A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

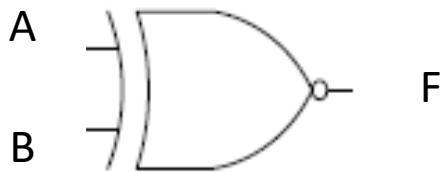
Porte XNOR ou (NON OU exclusif):

La fonction XNOR, symbolisée par $\otimes$, est donnée par l'expression :

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \overline{A} \overline{B} + AB \\ &= (\overline{A} + B)(A + \overline{B}) \end{aligned}$$

XNOR est une équivalence logique de l'inverse du XOR.

$$\overline{A \oplus B} = A \otimes B$$

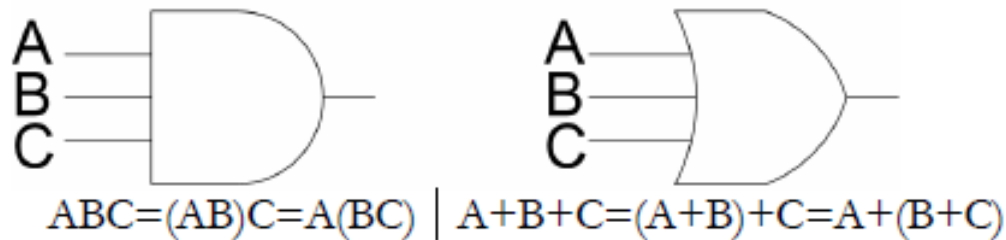


A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

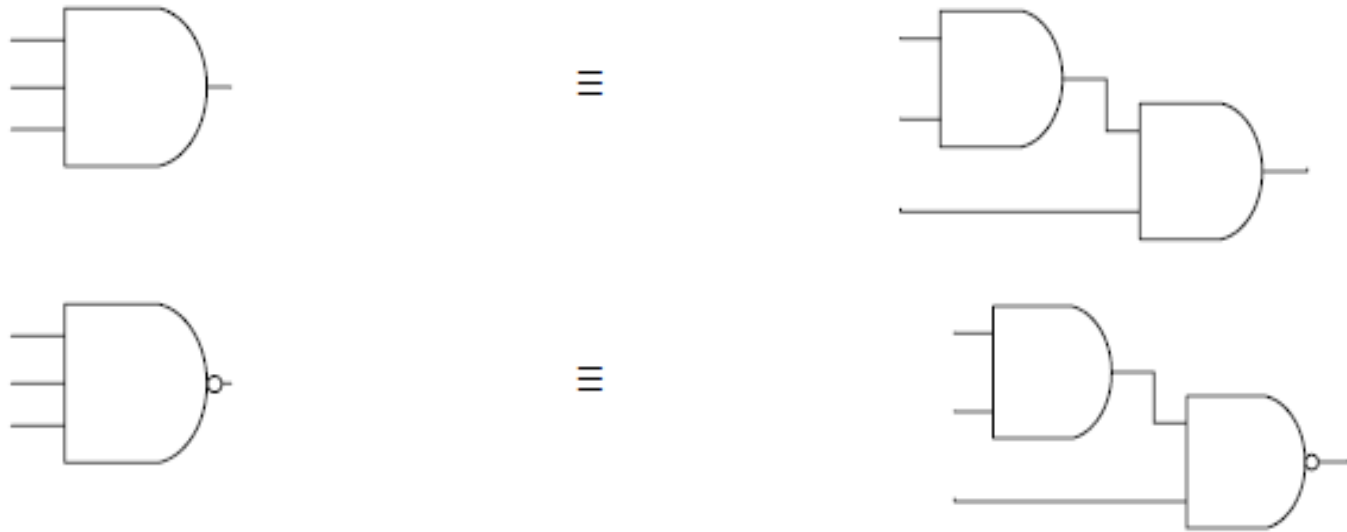
Portes à plusieurs entrées :

Les portes logiques, à l'exception de l'inverseur, peuvent avoir plus que deux entrées. Il importe alors de bien comprendre comment s'exprime la fonction logique associée à ces portes logiques, surtout si la sortie est inversée .

Dans le cas simple de portes non inversées (à trois entrées et plus), on peut recourir à l'axiome de l'associativité.



Dans le cas des portes inversées à plusieurs entrées, on maintient la cohérence de l'équivalence entre les portes logiques et l'algèbre de Boole en considérant que l'inversion est postérieure à l'expression logique qui la précède. Aussi aurons-nous :



III - Représentations d'une fonction logique

Il existe plusieurs formes de représentation d'une fonction logique ;
en voici trois :

- **Table de vérité.**
- **Formes canoniques.**
- **Chronogrammes.**
- **Logigrammes.**
- **Tableaux de Karnaugh.**

III - 1 - Représentation par des tables de vérité

- Une fonction X peut comporter n variables.
Nous avons vu que nous obtenons 2^n combinaisons pour un ensemble de n variables.
- Pour chacune de ces combinaisons, la fonction peut prendre une valeur 0 ou 1.
- L'ensemble de ces 2^n combinaisons des variables et la valeur associée de la fonction représente «la table de vérité»

c	b	a	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

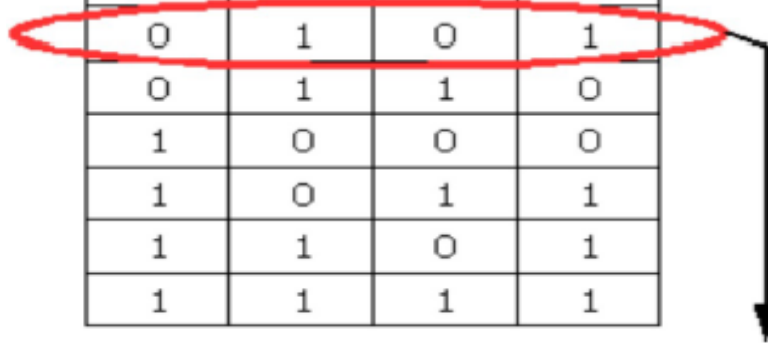
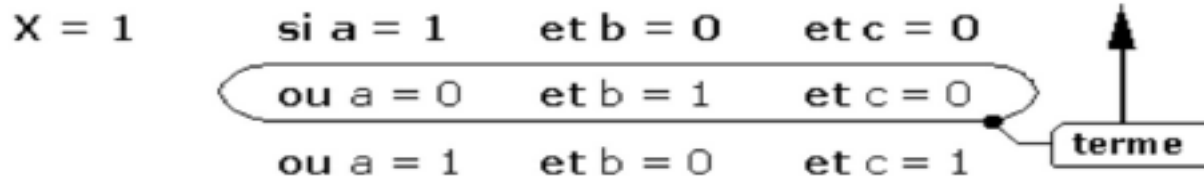


Fig. Exemple d'une table de vérité.

III - 2 - Représentation Algébriques ou par Formes Canoniques

- Pour écrire l'équation de X en fonction des 3 variables il faut dire :



- Autant de termes que de fois que la fonction est égale à 1. Ce qui donne une écriture "algébrique" en notant :
- La variable par sa lettre si elle vaut 1 (ex : si (a) vaut 1 nous écrirons a). La variable par sa lettre surlignée si elle vaut 0 (Si (a) vaut 0 nous écrirons a et nous lisons «a barre»).
- Pour la table de vérité ci-dessus, cela nous donne :

$$X = a.\bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.b.\bar{c} + a.\bar{b}.c + \bar{a}.b.c + a.b.c$$

- Cette forme d'écriture est appelée Forme Canonique et plus précisément Somme Canonique

Un exemple de détermination de forme canonique (Somme de produits) :

Soit la fonction logique F dont la table de vérité suivante.

a2	a1	a0	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- La forme canonique complète est :

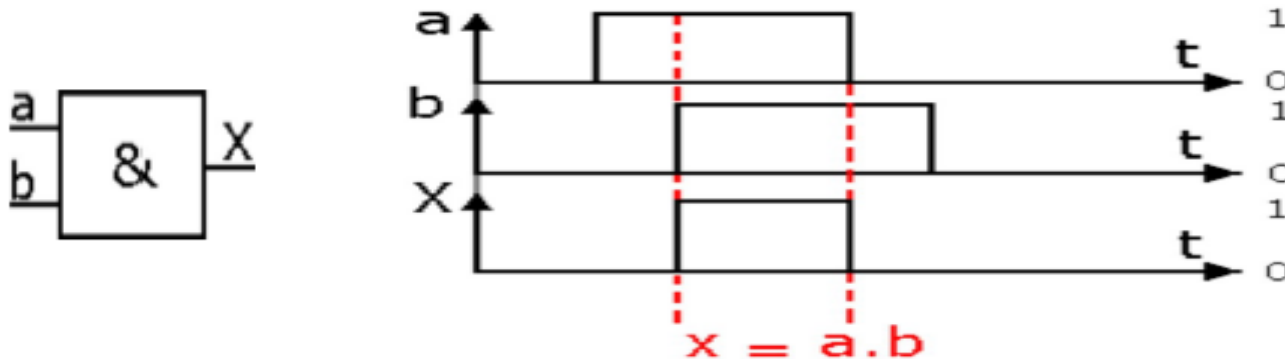
$$F = 1.\bar{a}_2.\bar{a}_1.\bar{a}_0 + 1.\bar{a}_2.\bar{a}_1.a_0 + 0.\bar{a}_2.a_1.\bar{a}_0 + 0.\bar{a}_2.a_1.a_0 + 0.a_2.\bar{a}_1.\bar{a}_0 + 1.a_2.\bar{a}_1.a_0 \\ + 1.a_2.a_1.\bar{a}_0 + 0.a_2.a_1.a_0$$

- La forme canonique abrégée est :

$$F = \bar{a}_2.\bar{a}_1.\bar{a}_0 + \bar{a}_2.\bar{a}_1.a_0 + a_2.\bar{a}_1.a_0 + a_2.a_1.\bar{a}_0$$

III - 3 - Représentation par des chronogrammes

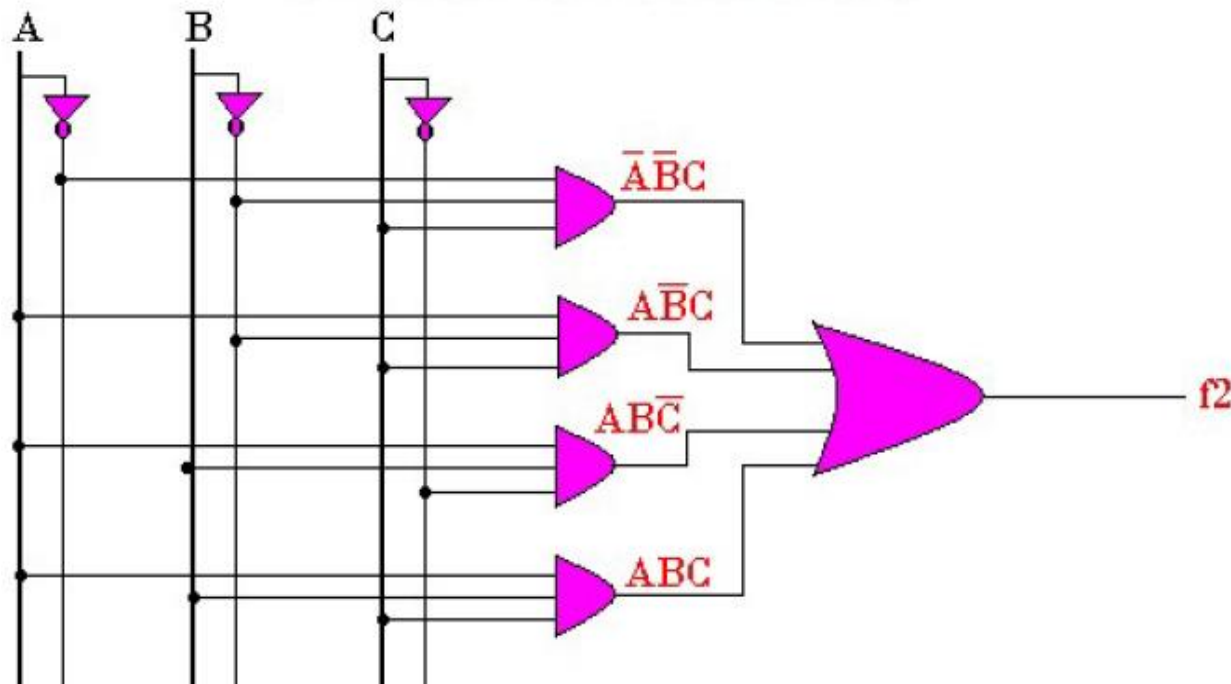
- Il existe une autre façon de représenter une fonction logique appelée **diagramme des temps**. Les variables binaires sont représentées par un niveau de tension lorsqu'elles sont à 1.
- Elles évoluent dans le temps et nous représentons la fonction logique résultante de ces variables, également par un niveau de tension. Nous obtenons un graphique appelé **chronogramme**.
- Exemple de chronogramme de la fonction ET à 2 entrées :



- Le cahier des charges d'un système logique peut être exprimé par un chronogramme (ex: gestion des feux de carrefour).

III - 4 - Représentation sous forme d'un logigramme

- Représenter une fonction logique sous la forme d'un logigramme revient à réaliser son schéma de câblage à l'aide des portes logiques.
- Exemple :** $f_2 = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$



IV - Simplification des fonctions logiques

IV – 1 - Simplification algébrique

- Une méthode simple de réduction algébrique est de rechercher les monômes adjacents après avoir mis l'expression algébrique que l'on cherche à simplifier sous forme d'une somme de produits ou polynômes que l'on appelle forme canonique.
- Ensuite, il suffira de rechercher des simplifications en utilisant la propriété d'absorption et les identités remarquables afin de faire apparaître des simplifications.

- **Exemple 01 :**

Simplifier algébriquement, la fonction f suivante :

$$f = xyz + \bar{x}yz + xy\bar{z} + x\bar{y}z$$

On peut l'écrire :

$$f = xyz + \bar{x}yz + xy\bar{z} + x\bar{y}z = (\bar{x}yz + xyz) + (xy\bar{z} + xyz) + (x\bar{y}z + xyz)$$

Puisque **nous savons que nous pouvons rajouter xyz** déjà présent autant de fois que nous voulons **sans changer la valeur de f.**

$$\text{d'où } f = yz (x + \bar{x}) + xz (y + \bar{y}) + xy (z + \bar{z})$$

$$\text{d'où } f = yz (1) + xz (1) + xy (1)$$

$$\text{d'où } f = xy + yz + zx$$

Exemple 02 :

$$S = (ab + c) (\bar{a}\bar{b} + c) (\bar{a}b + c) (ab + \bar{c})$$

En faisant les multiplications :

$$\begin{aligned} S = & \underbrace{ab\bar{a}\bar{b}ab}_1 + \underbrace{ab\bar{a}\bar{b}c\bar{c}}_2 + \underbrace{ab\bar{a}b\bar{c}ab}_3 + \underbrace{ab\bar{a}b\bar{c}\bar{c}}_4 + \underbrace{abc\bar{a}bab}_5 + \underbrace{abc\bar{a}b\bar{c}}_6 + \underbrace{abccab}_7 + \underbrace{abccc\bar{c}}_8 \\ & + \underbrace{c\bar{a}\bar{b}abab}_9 + \underbrace{c\bar{a}\bar{b}ab\bar{c}}_{10} + \underbrace{c\bar{a}b\bar{c}ab}_11 + \underbrace{c\bar{a}b\bar{c}\bar{c}}_{12} + \underbrace{cc\bar{a}bab}_13 + \underbrace{cc\bar{a}b\bar{c}}_{14} + \underbrace{cccab}_15 + \underbrace{cccc\bar{c}}_{16} \end{aligned}$$

qui devient en supprimant les termes inutiles :

Terme 1 : $abab\bar{a}bab = ab (a\bar{b}\bar{a}b)$ qui comme $a\bar{b}\bar{a}b = 0$ disparaît

Terme 2 : $abab\bar{a}bc = abc (a\bar{b} . \bar{a}b) = abc (a\bar{a}) (b\bar{b})$ disparaît

Terme 3 : $abab\bar{c}ab = abc (b\bar{b})$ disparaît

Terme 4 : $abab\bar{c}c = a (bc . \bar{b}c) = a (b\bar{b}) (c\bar{c})$ disparaît

Terme 5 : $abc\bar{a}bab = bc (a\bar{a})$ disparaît

Terme 6 : $abc\bar{a}bc = b (a\bar{a} . c\bar{c})$ disparaît

Terme 7 : $abccab = abcabc = abc$ •

Terme 8 : $abccc = abcc\bar{c} = ab (c\bar{c})$ disparaît

Terme 9 : $cab\bar{a}bab = cab\bar{a}b = c (\bar{a}b . ab) = c (a . \bar{a}) (b . \bar{b})$ disparaît

Terme 10 : $cab\bar{a}bc = cab\bar{a} . \bar{c}ab = (c . \bar{c}) (a . \bar{a}) (b . \bar{b})$ disparaît

Terme 11 : $cab\bar{c}ab = ca (b . \bar{b})$ disparaît

Terme 12 : $cab\bar{c}c = ab\bar{c} (c . \bar{c}) = 0$ disparaît

Terme 13 : $ccabab = cb (a . \bar{a}) = 0$ disparaît

Terme 14 : $ccab\bar{c} = ab\bar{c} (c . \bar{c}) = 0$ disparaît

Terme 15 : $cccab = cab = abc$ •

Terme 16 : $cccc = c\bar{c} = 0$ disparaît

$$\text{d'où } S = \underbrace{abc}_7 + \underbrace{abc}_{15} = abc$$

$$S = abc$$

IV – 2 - Simplification par Tableaux de Karnaugh

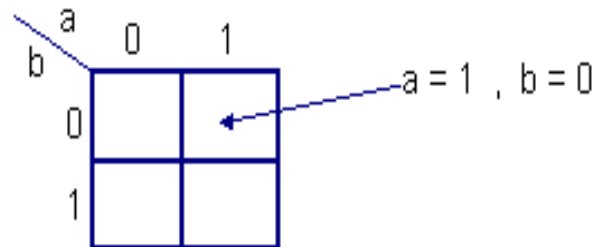
- Les Tableaux de Karnaugh permettent de simplifier des formes disjonctives ou sommes de produits (notée parfois " $\Sigma \Pi$ ") d'une fonction donnée, en regroupant des termes.
- Les regroupements sont des carrés ou des rectangles de une, 2, 4, 8 ou 16 cases contenant des '1'.
- Pour obtenir un terme à partir d'un regroupement, on se « balade » dans le regroupement **et on regarde toutes les variables qui changent : elles sont alors éliminées.**
- L'objectif d'une simplification par tableaux de Karnaugh est de **réaliser les regroupements les plus grands possibles et en nombre le plus petit possible.**

IV – 2 – 1 - Tableaux de Karnaugh

Le tableau de Karnaugh est une forme particulière de la table de vérité.
Le tableau de Karnaugh comprend 2^n cases, n étant le nombre de variables d'entrées de la fonction considérée.

a) Cas de deux variables :

Dans ce cas, le nombre de cases est $2^n = 2^2 = 4$.



L'ordre des variables en abscisse ou en ordonnée n'a pas d'importance, seul est très important le fait que lorsque l'on passe d'une case à la case adjacente, une seule variable change.

b) Cas de trois variables :

a		0	1	
bc	00			
	01		←	
	11			
	10	←		

$\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{array} \right.$

- Alors que pour deux variables, le tableau était carré, il est maintenant rectangulaire ; **en effet, nous avons représenté les variables bc sur une même colonne.**
- On peut remarquer que l'ordre de la quatrième et de la troisième ligne paraît inversé. En réalité, il n'en est rien.

c) Cas de 4 variables :

- On retrouve un carré qui comporte 2^4 cases soit : **$2^4 = 16$ cases**
- Nous voyons à nouveau, ce qui est absolument indispensable, que grâce au code Gray, en passant d'une case à l'autre horizontalement ou verticalement une seule variable change.

ab \ cd		00	01	11	10
cd	00				
	01				
	11				
	10				

IV – 2 – 2 – Méthode de Simplification de Karnaugh

Principe :

- Pour obtenir un terme à partir d'un regroupement, on se « balade » dans le regroupement **et on regarde toutes les variables qui changent : elles sont alors éliminées.**
- L'objectif d'une simplification par tableaux de Karnaugh est de **réaliser les regroupements les plus grands possibles et en nombre le plus petit possible.**

Il faut donc maintenant utiliser le tableau de Karnaugh pour rechercher les monômes adjacents au lieu de les rechercher algébriquement.

La table de Veitch (figure suivante) comporte en abscisse et en ordonnée les expressions algébriques représentées pour chaque case. Par exemple : case $\bar{a}b\bar{c}d$.

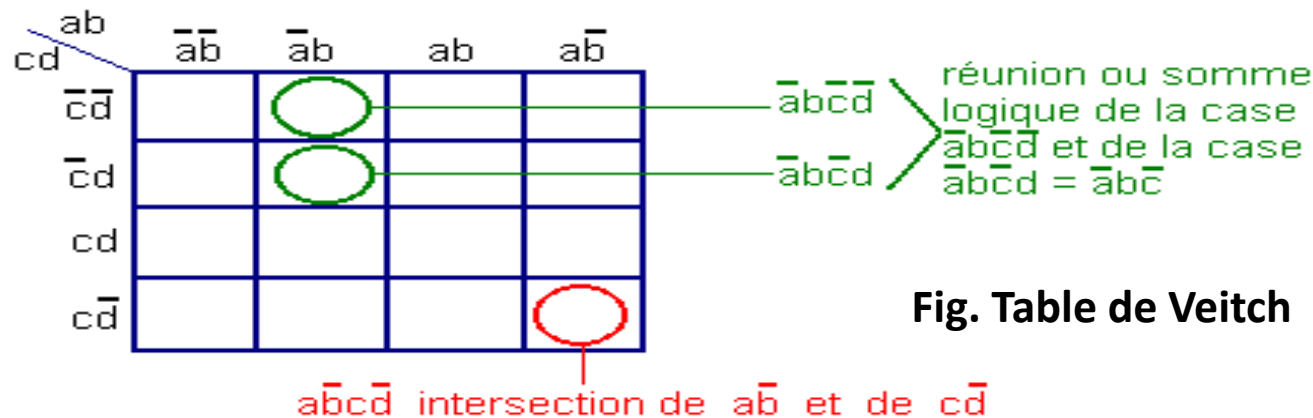


Fig. Table de Veitch

La table de Karnaugh (figure Ci-contre) donne, elle, pour chaque case les valeurs que prennent les variables en abscisse et en ordonnée.

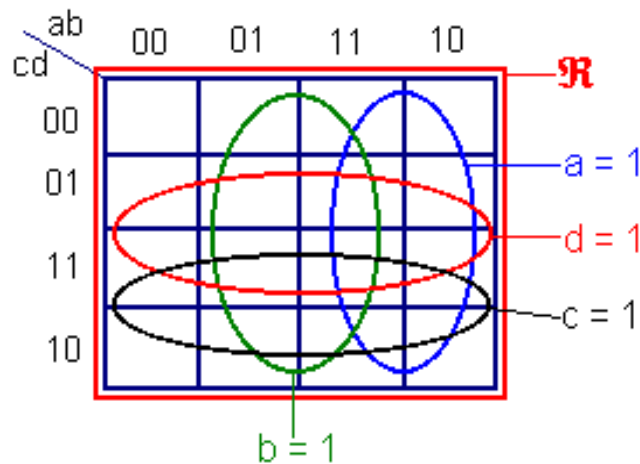


Fig. Table de Karnaugh pour 4 variables

- Dans les deux systèmes, on indique à l'intérieur de chaque case la valeur **1** ou **0** prise par le monôme considéré.
- On peut voir facilement que deux monômes adjacents vont se trouver dans deux cases voisines puisque l'on a dit au départ que les tableaux de Karnaugh étaient faits de telle sorte qu'on ne change qu'une variable lorsqu'on change de case.
- Il suffira donc pour chaque combinaison de variables de noter 1 ou 0 dans la case correspondante, selon le résultat trouvé pour la valeur de la fonction considérée, puis de regrouper les cases adjacentes dont le contenu est à 1 par groupe de 2, 4 ou 8 ou de 2^n termes adjacents.

Exemple 01 : Tableau à 3 variables

- Soit l'expression : $S = \bar{a}bc + c\bar{b} + \bar{c}a\bar{b}$ liant la variable S aux variables a, b, c .

Simplification par l'algèbre :

$$S = \bar{a}bc + c\bar{b} + \bar{c}a\bar{b}$$

$$\text{Mettons } \bar{a}\bar{b} \text{ en facteur : } S = \bar{a}\bar{b}(c + \bar{c}) + c\bar{b}$$

Utilisons l'identité remarquable $(x + \bar{x}) = 1$ d'où l'on peut écrire :

$S = \bar{a}\bar{b} + c\bar{b}$

Établissons la table de vérité :

a	b	c	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Simplification par les tableaux de Karnaugh :

- Reportons les valeurs de **S** dans le tableau de Karnaugh :

		a		0	1
bc		00	0	1	
		01	1	1	
		11	0	0	
		10	0	0	

$\overline{cb}$ (green oval)

$a\overline{b}$ (red circle)

Réalisons les groupements $\bar{a}\bar{b}$ et $c\bar{b}$.

Nous pouvons écrire : $S = \bar{a}.\bar{b} + c.\bar{b}$

Exemple 02 : Tableau à 4 variables

- Soit l'expression : $S = abcd + abd + bc$ liant la variable S aux variables a, b, c, d .

Simplification algébrique :

$S = abcd + abd + bc$

Mettons abd en facteur : $S = abd (c + 1) + bc$

Utilisons l'identité remarquable $(x + 1) = 1$ d'où $(c + 1) = 1$ d'où l'on peut écrire : $S = abd + bc$

Établissons la table de vérité :

a	b	c	d	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Simplification par les tableaux de Karnaugh :

- Reportons les valeurs de **S** dans le tableau de Karnaugh :

ab \ cd		00	01	11	10
00	0	0	0	0	0
01	0	0	1	0	0
11	0	1	1	0	0
10	0	1	1	0	0

Diagram illustrating the Karnaugh map for the function **S**. The map shows the values of **S** for all combinations of variables **a, b, c, d**. The map is a 4x4 grid with rows labeled **cd** (00, 01, 11, 10) and columns labeled **ab** (00, 01, 11, 10). The values of **S** are 0 for most cells, and 1 for the cells (01, 11), (11, 01), (11, 11), and (10, 01), (10, 11). The groupings are indicated by circles: a green circle labeled **abd** covers the cells (01, 11) and (11, 01), and a red circle labeled **bc** covers the cells (11, 01), (11, 11), (10, 01), and (10, 11).

Réalisons les groupements **abd** et **bc**.

Nous pouvons écrire : **S = abd + bc**

Attention: les regroupements peuvent ne pas être contigus géométriquement. Regardez la forme des regroupements bleu et vert pour comprendre ce que l'on veut dire par là.

Exemple 03 :

Regroupement rouge :

$s2 = x1 \cdot x2 \cdot x4$ où $x3$ s'en va dans le regroupement rouge.

Regroupement vert : $s1 = \overline{x1} \cdot \overline{x4}$
car $x2$ et $x3$ s'en vont dans le rectangle vert.

		X3 X4					
			00	01	11	10	
X1 X2	00	1	0	0	1		
	01	1	0	0	1		
	11	0	1	1	0		S1
	10	1	0	0	1		S2
							S3

Regroupement bleu : $s3 = \overline{x2} \cdot \overline{x4}$ car $x1$ et $x3$ s'en vont dans le rectangle Bleu.

Le résultat final donnera donc :

$$y = S1 + S2 + S3 = x1 \cdot x2 \cdot x4 + \overline{x1} \cdot \overline{x4} + \overline{x2} \cdot \overline{x4} .$$

Exemple 04 :

- **Rouge** : $\overline{B} \cdot \overline{D}$
- **Vert** : $\overline{C} \cdot D$
- **Violet** : $\overline{A} \cdot C$
- **Bleu** : $A \cdot B$

$$y = \overline{B} \cdot \overline{D} + \overline{C} \cdot D + A \cdot B + \overline{A} \cdot C$$

AB \ CD	00	01	11	10
10	1	1	1	1
11	1	1	1	
01	1	1	1	1
00	1		1	1

Remarque :

Le fait que le résultat final soit un OU entre tous les termes simplifiés est toujours vrai.

Cas de 5 variables :

- A partir de cinq variables, le problème se complique un peu.
En effet, il n'est pas possible d'obtenir sur une surface plane un tableau dans lequel une case soit adjacente à 5 autres cases.
- Il est toutefois possible d'utiliser la méthode de Karnaugh en faisant deux tableaux (figure suivante).

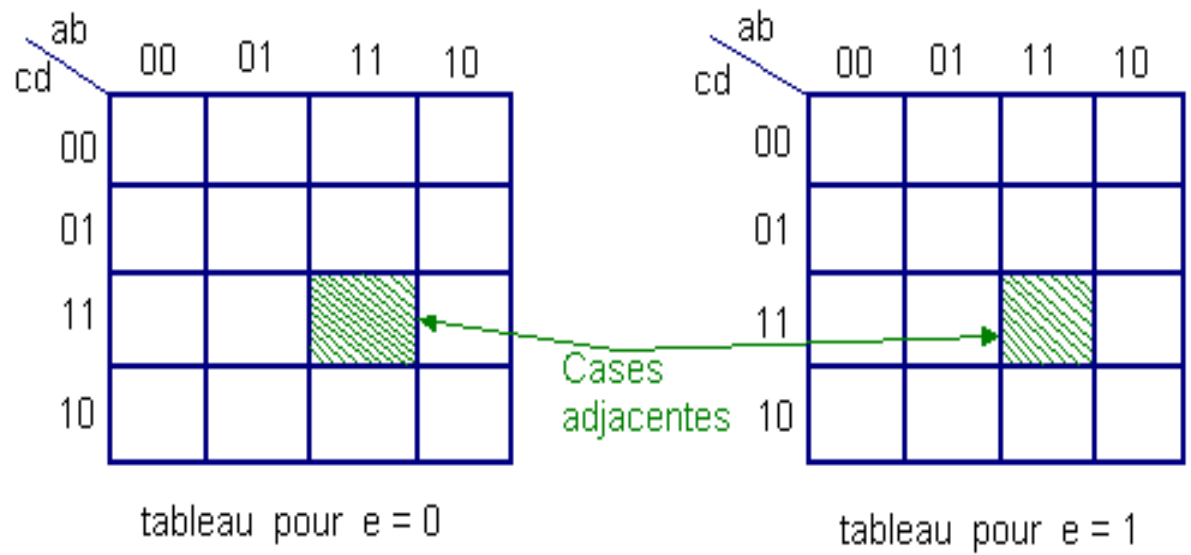


Fig. Tableaux de Karnaugh pour 5 variables

La figure suivante montre un cas où l'on pourrait effectuer trois groupements :

- **Groupe Rouge** : Les quatre coins dans un même plan (**tableau pour $e = 0$**).
- **Groupe Vert** : Deux cases dans **le même plan pour $e = 1$** .
- **Groupe Bleu** : Deux cases superposées.

		ab			
		00	01	11	10
cd	00	1			1
	01				
	11				
	10	1			1

tableau pour $e = 0$

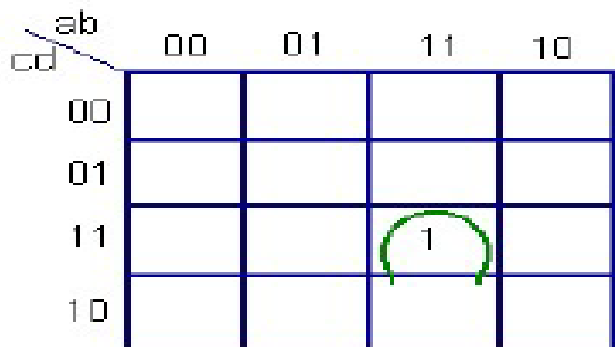
		ab			
		00	01	11	10
cd	00				1
	01				1
	11				
	10				

tableau pour $e = 1$

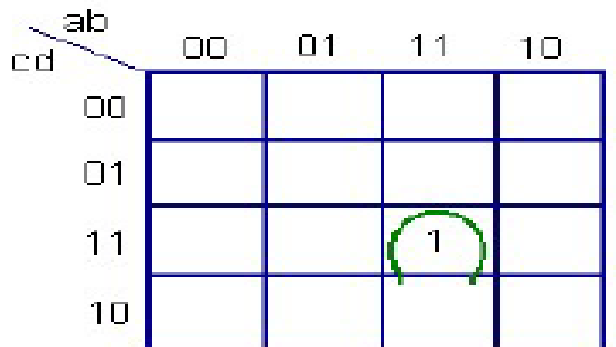
Fig. Regroupement pour tableaux de Karnaugh pour 5 variables

Cas de 6 variables :

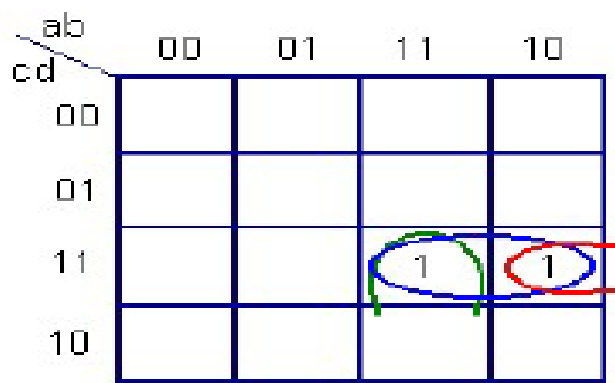
- On utilise le même principe avec quatre tableaux pour 5 variables.



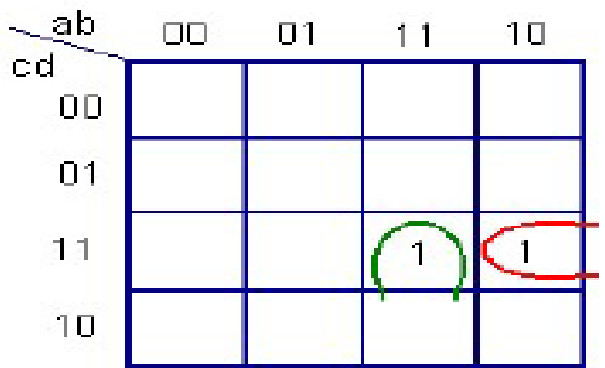
ef = 00



ef = 01



ef = 11



ef = 10

Fig. Tableaux de Karnaugh pour 6 variables

L'exemple de la figure ci-dessus, montre trois groupements :

- en vert sur quatre plans.
- en rouge sur deux plans.
- en bleu dans le même plan.

Traitement des cas indéterminés

- Parfois il arrive que pour une fonction donnée, une ou plusieurs combinaisons des entrées ne peut se produire.

Dans ce cas ce qui se passera en sortie n'a aucune importance : on dit que l'on a des cas indéterminés.

Définition :

- On appelle un cas indéterminé un cas pour lequel la valeur de la sortie nous importe peu.
- La raison peut être que la combinaison correspondante des entrées n'arrive jamais ou une autre raison.
- Ils sont ici notés ϕ . On les choisit alors comme cela nous arrange lors des regroupements dans notre tableau de Karnaugh.

Merci pour votre attention