

TD 5 Numérisation et codage

TD 1 : Echantillonnage et quantification

Exo 1 :

1- La numérisation c'est la conversion d'un signal analogique vers un signal numérique

2- Les avantages :

- Facilité de stockage
- Accessibilité aux données
- Partage facile

3- L'échantillonnage c'est le prélèvement à un intervalle de temps réguliers

Le perte d'information lors de la numérisation on peut conclure la durée : $f_e = \frac{1}{T_e}$

$$f_e \geq 2 f_{\max} \Rightarrow T_e = \frac{1}{2 f_{\max}}$$

Exo 2 :

$$20 \text{ kHz} \leq f \leq 20 \text{ kHz}$$

1- la fréquence d'échantillonnage minimale :

$$2 f_{\max} = 2 \times 20 \times 10^3$$

$$\Rightarrow f_e = 40 \times 10^3 \text{ Hz}$$

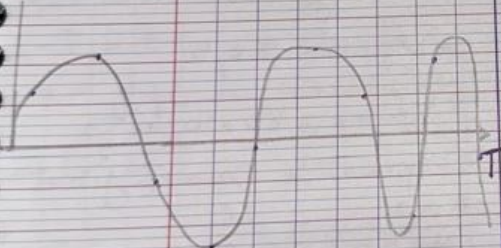
$$2- f_e(40) = 44,1 \times 10^3 \text{ Hz}$$

$$44,1 \times 10^3 \geq 40 \times 10^3$$

$\Rightarrow$ cette valeur accord précédente de la question suivant.

4) Théorème de Shannon :

$f_e \geq 2 f_{\max}$ pour éviter la maximum possible



together forever

3- le niveau d'intensité
2 nombres de bits

$$2^{16} = 65536 \text{ niveau}$$

4- durée maximale :
capacité de stockage

Taux échantillon $\times$ nombre bits $\times$ mono
ou stéréo

$$= \frac{700 \times 2^{20}}{44,1 \times 10^3 \times 16 \times 1}$$

$$\Rightarrow 1040,25 \text{ s} = \text{durée max}$$

Exo 3 :

Amp entre -8 volts et 8 volts

Amp max = 8 volts

Amp min = -8 volts

$$\text{Amp total} = \text{Amp max} - \text{Amp min}$$

$$= 8 - (-8) = 16 \text{ volts}$$

$$f_c = 10 \times 10^3 \text{ Hz} \quad 8 \text{ bits}$$

1- D'après Shannon :

$$f_c \geq 2 f_{\text{max}} \Rightarrow f_c = 20 \text{ kHz}$$

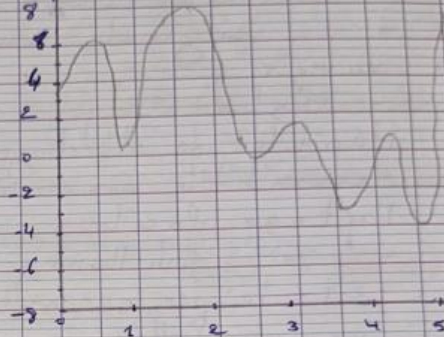
Donc 20×10^3 le nombre

de prélèvement d'échan
par seconde

$$T_e = \frac{1}{f_c} = \frac{1}{20 \times 10^3}$$

$$\Rightarrow T_e = 5 \times 10^{-5}$$

représentation :



2- le volume du fichier :

$$\text{Volume} = f_c \times \text{nbre bits} \times \text{Temps}$$

$$= 20 \times 10^3 \times 8 \times 5$$

$$\Rightarrow \text{Volume} = 80 \times 10^4 \text{ bits}$$

3- pas de quantification

$$\frac{\text{Amp}}{\text{nbre bit}} = \frac{16}{2^8}$$

$$\Rightarrow \text{pas} = 0,0625$$

4- 1^{er} échantillon 3 volts :

$$\frac{8+3}{0,0625} = 176$$

$$(176)_{10} \rightarrow (10110000)_{10}$$

together forever

2^{em} échantillon 6 volts :

$$\frac{6+8}{0,0625} = 224$$

$$(224)_{10} \rightarrow (11100000)_2$$

3^{em} échantillon 0 volts :

$$\frac{8}{0,0625} = 128$$

$$(128)_{10} \rightarrow (10000000)_2$$

4^{em} échantillon 7 volts :

$$\frac{7+8}{0,0625} = 240$$

$$(240)_{10} \rightarrow (11110000)_2$$

Exo 4 :

1 - 0 à 4,5V 10 mV par pas

2 - 8 bits 0,0 - 5V

3 - pas de convertisseur

$$p = \frac{5}{2^8} = \frac{5}{256}$$

$$\Rightarrow p = 0,0195 \text{ V}$$

4 - 0,0195 V = 19,5 mV

$$19,5 \text{ mV} > 10 \text{ mV}$$

$\Rightarrow$ Ce modèle ne correspond aux besoins de l'institut.

5 - le minimum bits du CAN :

$$2^n \geq p = \frac{A_{\text{max}}}{A_{\text{min}}} \Rightarrow 2^n = \frac{A_{\text{max}}}{p}$$

$$\Rightarrow n = \log_2 \left(\frac{A_{\text{max}}}{p} \right) = \log_2 \left(\frac{5}{0,005} \right)$$

$$\Rightarrow n = 8 \text{ bits}$$

TD 2 :

Exo 1 :

$$A = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$$

$$P(A) = \frac{2}{100} = 2\% \quad P(B) = \frac{10}{100} = 10\%$$

$$P(C) = 4\% \quad P(D) = 18\%$$

$$P(E) = 12\% \quad P(F) = 16\%$$

$$P(G) = 32\% \quad P(H) = 6\%$$

1 - pour coder cet alphabet A

$$\log_2(8) = 3 \text{ pour un seul caractère}$$

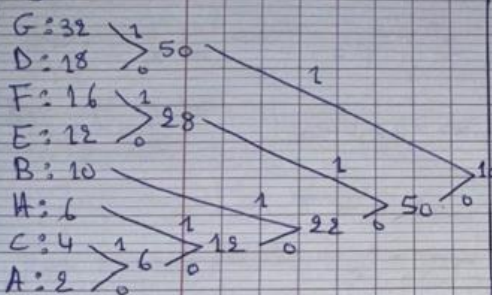
$$3 \times 100 = 300 \text{ bits pour}$$

l'alphabet A

2 - par ce qu'on peut trouver un codage plus court c'est l'algorithme de Huffman et Shannon.

together forever

3-



4-

G: 11 D: 10 F: 011
E: 010 B: 001 H: 0001
C: 00001 A: 00000

P	c	code
2	A	00000
4	C	00001
6	H	0001
10	B	001
12	E	010
16	F	011
18	D	10
32	G	11

$$5- L_{\text{moyenne}} = \sum_{i=1}^n P(x_i) \times L(x_i)$$

$$= 0,02 \times 5 + 0,1 \times 3 + 0,04 \times 5 + 0,18 \times 2 + 0,12 \times 3 + 0,16 \times 3 + 0,32 \times 2 + 0,06 \times 4$$

$$\Rightarrow L_{\text{moyenne}} = 2,68$$

Exo2:

$$P(0) = 0,8 \quad P(1) = 0,2$$

code = $\{a, b, c, d, e\}$

1- $0x1^2$, est uniquement décodable, car aucun code répète.

$$2- H(x) = \sum_{i=1}^n P(x_i) \cdot \log_2 \left(\frac{1}{P(x_i)} \right)$$

$$= P(0) \cdot \log_2 \left(\frac{1}{P(0)} \right) + P(1) \cdot \log_2 \left(\frac{1}{P(1)} \right)$$

$$= 0,8 \times \log_2 \left(\frac{1}{0,8} \right) + 0,2 \times \log_2 \left(\frac{1}{0,2} \right)$$

$$\Rightarrow H(x) = 0,72$$

$$3- L_{\text{Efficacité}} = \frac{H(x)}{L_{\text{moyenne}}}$$

$$L_{\text{moyenne}} = \sum_{i=1}^n P(x_i) \cdot l(x_i)$$

$$P(a) = 0,2 \quad P(b) = 0,8 \times 0,2$$

$$P(c) = (P(0))^2 \cdot P(1) = (0,8)^2 \cdot 0,2$$

$$P(d) = (0,8)^3 \cdot 0,2$$

$$P(a) = 0,2 \quad P(b) = 0,16$$

$$P(c) = 0,128 \quad P(d) = 0,1024$$

$$P(e) = (0,8)^4 = 0,4096$$

$$L_{\text{moyenne}} = 0,2 \times 1 + 0,16 \times 2$$

$$+ 0,128 \times 3 + 0,1024 \times 4 + 0,4096 \times 4$$

$$\Rightarrow L_{\text{moyenne}} = 2,952$$

together forever

$$L\text{-efficacité} = \frac{0,72}{2,952}$$

$$\Rightarrow L\text{-efficacité} = 0,24$$

Exo 3:

$$M = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$$

$$P(a_1) = 0,4, P(a_2) = 0,2$$

$$P(a_3) = 0,2, P(a_4) = 0,1$$

$$P(a_5) = 0,07, P(a_6) = 0,06$$

$$P(a_7) = 0,04, P(a_8) = 0,03$$

$$H(x) = \sum_{i=1}^n P(a_i) \cdot \log_2 \left(\frac{1}{P(a_i)} \right)$$

$$= 0,4 \times \log_2 \left(\frac{1}{0,4} \right) + 0,2 \times \log_2 \left(\frac{1}{0,2} \right)$$

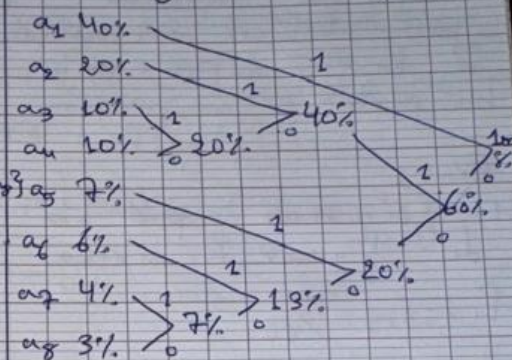
$$+ 0,2 \times \log_2 \left(\frac{1}{0,2} \right) + 0,1 \times \log_2 \left(\frac{1}{0,1} \right)$$

$$+ 0,07 \times \log_2 \left(\frac{1}{0,07} \right) + 0,06 \times \log_2 \left(\frac{1}{0,06} \right)$$

$$+ 0,04 \times \log_2 \left(\frac{1}{0,04} \right) + 0,03 \times \log_2 \left(\frac{1}{0,03} \right)$$

$$\Rightarrow H(x) = 2,51$$

2- L'algorithme Huffman:



$$a_1: 1 \quad a_2: 011 \quad a_3: 0101$$

$$a_4: 0100 \quad a_5: 001$$

$$a_6: 0001 \quad a_7: 00001$$

$$a_8: 00000$$

$$3- L_{moyenne} = \sum_{i=1}^n P(a_i) \cdot L(a_i)$$

$$= 0,4 \times 1 + 0,2 \times 3 + 0,2 \times 4 + 0,1 \times 4$$

$$+ 0,07 \times 3 + 0,06 \times 4 + 0,04 \times 5$$

$$+ 0,03 \times 5$$

$$\Rightarrow L_{moyenne} = 2,6$$

$$4- Redondance: H_{max}(x) - H(x)$$

$$= \log_2(8) - H(x) = \log_2(8) - 2,51$$

$$\Rightarrow R = 0,49$$

together forever

5- pour améliorer l'efficacité de codage, on peut utiliser la méthode de Huffman, pour éviter la perte de compression

Exo 4:

1- fréquences d'apparition de chacun des pixels:

$$P(128) = 7/16$$

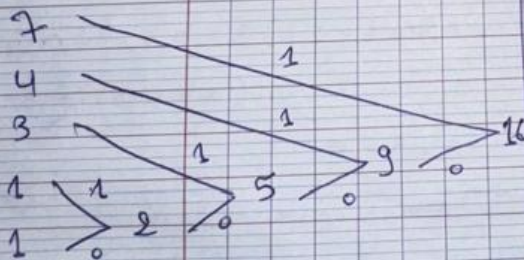
$$P(132) = 4/16$$

$$P(154) = 1/16$$

$$P(100) = 3/16$$

$$P(112) = 1/16$$

Arbre de Huffman:



128: 1

132: 01

154: 0001

100: 0001

112: 0000

les mots de code

1	01	1	01
0001	1	01	1
001	001	1	1
001	0000	1	01

$$2- H(x) = \sum_{i=1}^n P(x_i) \cdot \log_2 \left(\frac{1}{P(x_i)} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{16} \cdot \log_2 \left(\frac{1}{7} \right) \right) + \frac{4}{16} \log_2 \left(\frac{1}{4} \right)$$

$$+ \frac{7}{16} \log_2 \left(\frac{1}{7} \right) + \frac{3}{16} \log_2 \left(\frac{1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow H(x) = 1,92$$

$$2- \text{Efficacité} = \frac{H(x)}{L_{\text{moyenne}}}$$

$$L_{\text{moyenne}} = \sum_{i=1}^N P(x_i) \cdot l(x_i)$$

$$= \frac{1}{16} \times 4 + \frac{4}{16} \times 2 + \frac{7}{16} \times 1$$

$$+ \frac{3}{16} \times 3 + \frac{1}{16} \times 4$$

$$\Rightarrow L_{\text{moyenne}} = 2$$

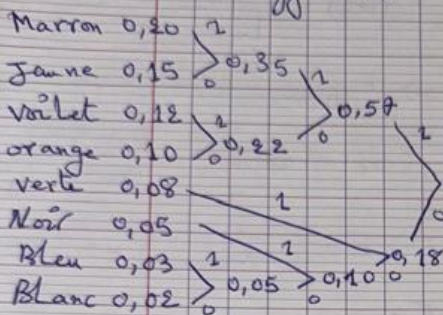
$$\text{Efficacité} = \frac{1,92}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Efficacité} = 0,96$$

together forever

Exo 5:

1- Code de Huffman:



$$0,02 \cdot \log_2\left(\frac{1}{0,02}\right) + 0,03 \cdot \log_2\left(\frac{1}{0,03}\right) + 0,15 \cdot \log_2\left(\frac{1}{0,15}\right) + 0,08 \cdot \log_2\left(\frac{1}{0,08}\right) + 0,12 \cdot \log_2\left(\frac{1}{0,12}\right) + 0,1 \cdot \log_2\left(\frac{1}{0,1}\right) + 0,2 \cdot \log_2\left(\frac{1}{0,2}\right)$$

$$\Rightarrow H(x) = 2,35$$

$$\Rightarrow \text{Efficacité} = \frac{2,35}{2,23}$$

$$\Rightarrow \text{Efficacité} = 1,05$$

Marron: 111 Jaune: 110
Violet: 101 Orange: 100
Vert: 01 Noir: 001
Bleu: 0001 Blanc: 0000

$$2- L_{\text{moyenne}} = \sum_{i=1}^n P(x_i) \cdot l(x_i)$$

$$= 0,05 \times 3 + 0,02 \times 4 + 0,03 \times 4 + 0,15 \times 3 + 0,08 \times 2 + 0,12 \times 3 + 0,10 \times 3 + 0,20 \times 3$$

$$\Rightarrow L_{\text{moyenne}} = 2,23$$

$$3- \text{Efficacité} = \frac{H(x)}{L_{\text{moyenne}}}$$

$$H(x) = \sum_{i=1}^n P(x_i) \cdot \log_2\left(\frac{1}{P(x_i)}\right)$$

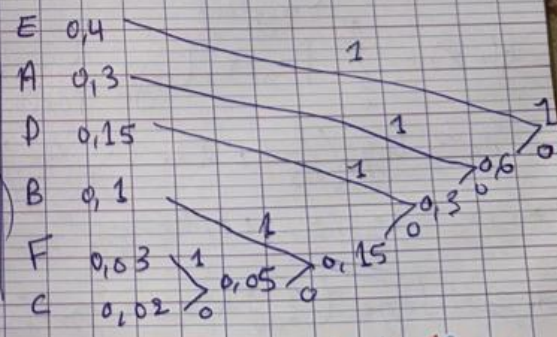
$$= 0,05 \times \log_2\left(\frac{1}{0,05}\right) +$$

$E_{\text{Huffman}} > E_{\text{fixe}}$, Donc le code de Huffman est plus efficace.

TD 3:

Exo 1:

$P(A) = 0,30$, $P(B) = 0,10$, $P(C) = 0,02$
 $P(D) = 0,15$, $P(E) = 0,4$, $P(F) = 0,03$



together forever

E: 1 A: 01 D: 001
 B: 0001 F: 00001
 C: 00000
 Shannon:

B	0,45	01
A	0,3	10
E	0,4	11
B	0,1	001
F	0,03	0001
C	0,02	00000

2- Code Shannon-Fano:

1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 0
 E B E A F A A E C

3- $L_{\text{moyenne}} = \sum_{i=1}^N P(x_i) l(x_i)$
 $= 0,3 \times 2 + 0,1 \times 3 + 0,02 \times 5$
 $+ 0,15 \times 2 + 0,4 \times 2 + 0,03 \times 4$
 $\Rightarrow L_{\text{moyenne}} = 2,22$

4- $\text{Eff} = \frac{H(X)}{L_{\text{moyenne}}}$

$H(X) = \sum_{i=1}^N P(x_i) \cdot \log_2 \frac{1}{P(x_i)}$
 $= 0,3 \cdot \log_2 \left(\frac{1}{0,3} \right) + 0,1 \cdot \log_2 \left(\frac{1}{0,1} \right)$
 $+ 0,2 \cdot \log_2 \left(\frac{1}{0,2} \right) + 0,15 \cdot \log_2 \left(\frac{1}{0,15} \right)$
 $+ 0,4 \cdot \log_2 \left(\frac{1}{0,4} \right) + 0,03 \cdot \log_2 \left(\frac{1}{0,03} \right)$

$\Rightarrow H(X) = 2,057$

$E(\text{DCB}) = \frac{H(X)}{L_{\text{moyenne}}} = \frac{2,057}{2}$

$\Rightarrow E(\text{DCB}) = 0,6857$

$E(\text{code-shannon}) = \frac{2,057}{2,2}$

$\Rightarrow E(\text{code-shannon}) = 0,9357$

Exo 2:

1- code RLE:

(4, 255), (1, 0), (4, 255)
 (3, 255), (3, 0), (3, 255)
 (2, 255), (5, 128), (2, 255)
 (1, 255), (3, 128), (1, 0), (3, 128), (1, 255)
 (3, 128), (3, 0), (3, 128)
 (1, 255), (3, 128), (1, 0), (3, 128), (1, 255)
 (2, 255), (5, 128), (2, 255)
 (3, 255), (3, 0), (3, 255)
 (4, 255), (1, 0), (4, 255)

~~code RLE encoder~~

Taux de compression:

Taille compressée

Taille originale

$= \frac{26 \times 2}{8 \times 8} = \frac{52}{64}$

$\Rightarrow \text{Taux} = 0,65 = 64\%$

together forever

$$3 - \text{Gain} = 1 - \text{Taux} \\ = 1 - 0,64$$

$$\Rightarrow \text{Gain} = 0,36 = 36\%$$

Exo 4: les inconvénients:

- Inefficace pour les données
- répétition des données
- perte de visibilité

Exo 5:

u = bbbabbbaabbbb

1 - Compression LZ78:

indice	caractère	output
1	b	(0, b)
2	bb	(1, b)
3	a	(0, b)
4	bb a	(2, a)
5	a b	(3, b)
6	bbb	(2, b)

Compression LZW:

indice	caractère
1	a
2	b
3	bb
4	bb a
5	a b
6	bb a a
7	a b b
8	bbb

[2, 3, 1, 4, 5, 3, 2]

2 - Décompression LZ78:

(0, b) (0, a) (2, a) (3, b)
(4, a)

$\Rightarrow$ "babbaabbbba"

3 - Décompression LZW:

[1, 2, 0, 4, 1]

$\Rightarrow$ "bbbaabbb"

Exo 4:

N'est pas dans le cours.