

Prof. Mohamed Aly LOULY

Recherche Opérationnelle

1

- ✓ Présentation du cours
- ✓ Sensibilisation à l'Optimisation Combinatoire
- ✓ Présentation de la Modélisation Linéaire

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Les capacités développées dans cet éléments de module :

- ✓ Identifier les problèmes d'optimisation
- ✓ Concevoir une modélisation mathématiquement des problèmes d'optimisation
- ✓ Appliquer des méthodes de résolution de programmes linéaires
- ✓ Développer des systèmes d'aide à la décision (DSS) organisés autour d'un solveur

ÉLÉMENTS DU PROGRAMME

Les éléments du programme sont les suivantes :

- ✓ Modélisation de problèmes d'optimisation sous la forme de programmes linéaires
- ✓ Méthode géométrique et résolution graphique
- ✓ Méthode simplexe à une et deux phases
- ✓ Solveurs de programmes linéaires
- ✓ Introduction à l'optimisation non linéaire

EXEMPLE D'OPTIMISATION COMBINATOIRE AVEC PVC



$(n-1)!/2$ alternatives pour faire une tournée de n villes
(pour $n > 2$)

VOYAGEUR DE COMMERCE

Exemples d'applications du TSP et ses extensions :

1. Optimisation du transport des camions, bus, bateaux et avions.
2. Ordonnancement des activités d'un poste de travail.
3. Fabrication des cartes perforées. (Ordre de fonctionnement de la perceuse)

L'ÉNUMÉRATION N'EST PAS POSSIBLE

Villes	Tournées	Secondes	Années	Milliards d'années
10	181440	0,00018144	5,75342E-12	5,75342E-21
20	6,0823E+16	60822550,2	1,928670415	1,92867E-09
30	4,4209E+30	4,42088E+21	1,40185E+14	140185,2168
40	1,0199E+46	1,01989E+37	3,23406E+29	3,23406E+20
50	3,0414E+62	3,04141E+53	9,64425E+45	9,64425E+36
60	6,9342E+79	6,93416E+70	2,19881E+63	2,19881E+54
70	8,5561E+97	8,55612E+88	2,71313E+81	2,71313E+72

La puissance des ordinateurs n'est pas suffisante pour opérer une énumération d'un espace de recherche de la taille exponentielle.

2. PROGRAMMATION LINÉAIRE

La modélisation linéaire

	Ciment 1	Ciment 2	Temps disponible par jour
Profit par tonne	50 \$	70 \$	
Durée de calcination par tonne dans le four	20 min	30 min	6 h = 360 min
Durée de broyage par tonne dans l'atelier	40 min	35 min	8 h = 480 min

Planification de la production quotidienne de la cimenterie :
Combien produire de chaque ciment chaque jour ?

PROGRAMME LINÉAIRE

x_1 : quantité du ciment 1

x_2 : quantité du ciment 2

$$\text{Max } z = 50x_1 + 70x_2$$



Une fonction-objectif linéaire

$$20x_1 + 30x_2 \leq 360$$

$$40x_1 + 35x_2 \leq 480$$



Des contraintes linéaires

$$x_1, x_2 \geq 0$$

SOLUTIONS D'UN PL

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 50x_1 + 70x_2 \\ 20x_1 + 30x_2 &\leq 360 \\ 40x_1 + 35x_2 &\leq 480 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$(x_1, x_2) = (10, 10)$: solution non réalisable de ce PL.

$(x_1, x_2) = (1, 1)$: solution réalisable, mais non optimale.

$(x_1, x_2) = (3.6, 9.6)$: solution optimale.

$Z^* = 852$: le profit maximal.

FORME GÉNÉRALE D'UN PL

$$\text{Max ou Min } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\forall i = 1 \dots m : \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq, = \text{ ou } \geq b_i$$

$$\forall j = 1 \dots n : \quad x_j \geq 0$$

FORME CANONIQUE D'UN PL

$$\text{Max } c^T x$$

$$\text{Max } (50, 70) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$Ax \leq b$$



$$\begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 40 & 35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 360 \\ 480 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0$$

CANONIQUE VERS STANDARD

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + e_i = b_i \\ e_i \geq 0 \end{cases}$$

Ajout des variables d'écart

FORME STANDARD D'UN PL

$$\text{Max } c^T x$$

$$\text{Max } (50, 70, 0, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$



$$\begin{pmatrix} 20 & 30 & 1 & 0 \\ 40 & 35 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 \\ 480 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \geq 0$$

STANDARD VERS CANONIQUE

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \\ -\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq -b_i \end{cases}$$

Dédoublément des contraintes

INTERPRÉTATION ÉCONOMIQUE

- Un acteur économique exerce n activités avec des intensités x_j à déterminer. Ces activités utilisent m ressources.
- On connaît la quantité a_{ij} de la ressource i nécessaire pour exercer l'activité j avec l'intensité 1.
- On connaît le profit ou le coût c_j pour une intensité 1 de l'activité j .
- On veut trouver les intensités des activités, compatibles avec les ressources, pour maximiser le profit ou minimiser le coût.