

**Prof. Mohamed Aly LOULY**

# **Recherche Opérationnelle**

- ✓ Simplexe deux phases et méthode Grand M
- ✓ Dualité et son interprétation
- ✓ Programmes linéaires en nombres entiers
- ✓ Linéarisation

# SIMPLEXE DEUX PHASES

- ❖ Certains problèmes linéaires n'admettent pas de solution admissible et d'autres n'ont pas une solution de base admissible initiale évidente.
- ❖ La méthode des deux phases va permettre de déterminer une base admissible ou prouver que le problème n'a pas de solution.

# SIMPLEXE DEUX PHASES

Soit le PL suivant :

$$(PL) \begin{cases} \text{Max } z = 2x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Les variables d'écart ne constituent pas une base réalisable :

$$(PL) \begin{cases} \text{Max } z = 2x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 + e_1 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - e_2 = 2 \\ x_1, x_2, e_1, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

# SIMPLEXE DEUX PHASES

On introduit alors les **variables artificielles** pour les contraintes d'égalité et les contraintes de supériorité  $\geq$ .

$$(PL) \begin{cases} \text{Max } z = 2x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 + e_1 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - e_2 + a_1 = 2 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, a_1 \geq 0 \end{cases}$$

Les variables d'écart des contraintes d'infériorité  $\leq$  et les variables artificielles constituent la **base de départ de la première phase**. La fonction objectif et de cette première phase est la minimisation des variables artificielles.

# PREMIÈRE PHASE

On commence par minimiser les variables artificielles :

$$(P1) \begin{cases} \text{Max } z_1 = -a_1 \\ x_1 + x_2 + e_1 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - e_2 + a_1 = 2 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, a_1 \geq 0 \end{cases}$$

- ✓ Si la valeur optimale de la fonction objectif de cette première phase **P1** est nulle, alors sa solution optimale constitue une solution de base réalisable du problème initial **PL**.
- ✓ Si la valeur optimale n'est pas nulle, alors le problème initial n'admet pas de solution réalisable.

# LA PREMIÈRE PHASE

$$\begin{aligned} \text{Max } z_1 &= 3x_1 + x_2 - e_2 - 2 \\ x_1 + x_2 + e_1 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 - e_2 + a_1 &= 2 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, a_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

| Base   | X1 | X2 | E1 | E2 | A1 | b      |
|--------|----|----|----|----|----|--------|
| E1     | 1  | 1  | 1  | 0  | 0  | 6      |
| A1     | 3  | 1  | 0  | -1 | 1  | 2      |
| Profit | 3  | 1  | 0  | -1 | 0  | Z = -2 |

| Base   | X1 | X2  | E1 | E2   | A1   | b     |
|--------|----|-----|----|------|------|-------|
| E1     | 0  | 2/3 | 1  | 1/3  | -1/3 | 16/3  |
| X1     | 1  | 1/3 | 0  | -1/3 | 1/3  | 2/3   |
| Profit | 0  | 0   | 0  | 0    | -1   | Z = 0 |

La solution optimale de  
la première phase →

# LA DEUXIÈME PHASE

Suppression de la variable artificielle et introduction de la fonction objectif initiale →

$$z = 2x_1 + 5x_2$$

$$x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}e_2 = \frac{2}{3}$$

Première itération de la deuxième phase →

| Base   | X1 | X2   | E1 | E2   | A1   | b       |
|--------|----|------|----|------|------|---------|
| E1     | 0  | 2/3  | 1  | 1/3  | -1/3 | 16/3    |
| X1     | 1  | 1/3  | 0  | -1/3 | 1/3  | 2/3     |
| Profit | 0  | 13/3 | 0  | 2/3  | -2/3 | Z = 4/3 |

| Base   | X1  | X2 | E1 | E2 | b      |
|--------|-----|----|----|----|--------|
| E1     | -2  | 0  | 1  | 1  | 4      |
| X2     | 3   | 1  | 0  | -1 | 2      |
| Profit | -13 | 0  | 0  | 5  | Z = 10 |

# LA DEUXIÈME PHASE

Deuxième itération de  
la deuxième phase →

| Base   | X1  | X2 | E1 | E2 | b      |
|--------|-----|----|----|----|--------|
| E1     | -2  | 0  | 1  | 1  | 4      |
| X2     | 3   | 1  | 0  | -1 | 2      |
| Profit | -13 | 0  | 0  | 5  | Z = 10 |

La solution optimale →

| Base   | X1  | X2 | E1 | E2 | b      |
|--------|-----|----|----|----|--------|
| E2     | -2  | 0  | 1  | 1  | 4      |
| X2     | 5   | 1  | 1  | 0  | 6      |
| Profit | -23 | 0  | -5 | 0  | Z = 30 |

# LA MÉTHODE DU GRAND M

Il est possible de fusionner les deux phases en attribuant une grande pénalité  $M$  aux variables artificielles dans la fonction objectif.

$$\begin{cases} \text{Max } z = 2x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Max } z = 2x_1 + 5x_2 - Ma_1 \\ x_1 + x_2 + e_1 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - e_2 + a_1 = 2 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, a_1 \geq 0 \end{cases}$$

# LA MÉTHODE DU GRAND M

$$\text{Max } z = (3M + 2)x_1 + (M + 5)x_2 - Me_2 - 2M$$

$$x_1 + x_2 + e_1 = 6$$

$$3x_1 + x_2 - e_2 + a_1 = 2$$

$$x_1, x_2, e_1, e_2, a_1 \geq 0$$

| Base   | X1   | X2  | E1 | E2 | A1 | b       |
|--------|------|-----|----|----|----|---------|
| E1     | 1    | 1   | 1  | 0  | 0  | 6       |
| A1     | 3    | 1   | 0  | -1 | 1  | 2       |
| Profit | 3M+2 | M+5 | 0  | -M | 0  | Z = -2M |

# LA MÉTHODE DU GRAND M

| Base   | X1 | X2             | E1 | E2             | A1               | b                 |
|--------|----|----------------|----|----------------|------------------|-------------------|
| E1     | 0  | $\frac{2}{3}$  | 1  | $\frac{1}{3}$  | $-\frac{1}{3}$   | $\frac{16}{3}$    |
| X1     | 1  | $\frac{1}{3}$  | 0  | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$    | $\frac{2}{3}$     |
| Profit | 0  | $\frac{13}{3}$ | 0  | $\frac{2}{3}$  | $-M-\frac{2}{3}$ | $Z = \frac{4}{3}$ |

Les variables artificielles sont supprimées dès leur sortie de la base.

# LA PROBLÈME DUAL DE LA CIMENTERIE

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 50x_1 + 70x_2 \\ 20x_1 + 30x_2 &\leq 360 \\ 40x_1 + 35x_2 &\leq 480 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z = 50x_1 + 70x_2 &\leq 64x_1 + 71x_2 \leq 912 \\ (20x_1 + 30x_2) \times 1,2 &\leq 360 \times 1,2 \\ (40x_1 + 35x_2) \times 1,0 &\leq 480 \times 1,0 \end{aligned}$$

Prix de vente acceptable des ressources

$$z \leq 912$$

$$\begin{aligned} \text{Min } w &= 360y_1 + 480y_2 \\ 20y_1 + 40y_2 &\geq 50 \\ 30y_1 + 35y_2 &\geq 70 \end{aligned}$$

Prix de vente minimal des ressources

$$(2.1, 0.2) \rightarrow w = 852$$

# LA DUALITÉ

Un problème **dual** est associé à chaque problème **primal**. Le **primal** maximise le profit de la production et le **dual** donne la valeur des ressources.

$$\text{Primal : } \begin{cases} \text{Max } z = c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{Dual : } \begin{cases} \text{Min } w = b^T y \\ A^T y \geq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Les solutions **réalisables** du primal et du dual vérifient :

$$z = c^T x \leq b^T y = w$$

Les solutions **optimales** du primal et du dual vérifient :

$$z^* = c^T x^* = b^T y^* = w^*$$

# EXEMPLE DE DUALITÉ

## Exemple de la cimenterie

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 50x_1 + 70x_2 \\ 20x_1 + 30x_2 &\leq 360 \\ 40x_1 + 35x_2 &\leq 480 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$(3.6, 9.6) \rightarrow z = 852$$

Plan de production optimal

$$\begin{aligned} \text{Min } w &= 360y_1 + 480y_2 \\ 20y_1 + 40y_2 &\geq 50 \\ 30y_1 + 35y_2 &\geq 70 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$(2.1, 0.2) \rightarrow w = 852$$

Profit unitaire d'extension des  
ressources

Prix de vente unitaire minimal

# EXTENSION DES RESSOURCES SUR L'EXEMPLE DE LA CIMENTERIE

Le solution optimale du problème dual donne le profit supplémentaire si on augmente la capacité de production.

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 50x_1 + 70x_2 \\ 20x_1 + 30x_2 &\leq 360 + 1 \\ 40x_1 + 35x_2 &\leq 480 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$(3.53, 9.68) \rightarrow z = 852 + 2.1$$

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 50x_1 + 70x_2 \\ 20x_1 + 30x_2 &\leq 360 \\ 40x_1 + 35x_2 &\leq 480 + 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$(3.66, 9.56) \rightarrow z = 852 + 0.2$$

# RELATIONS DE COMPLÉMENTARITÉ

Il n'y a pas de profit à réaliser en augmentant une ressource qui ne limite pas la capacité de production :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* < b_i \quad \rightarrow \quad y_i^* = 0$$

Il n'y a pas de profit à réaliser en produisant un article dont le profit est plus faible que celui de la vente des ressources qui le composent :

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* > c_j \quad \rightarrow \quad x_j^* = 0$$

# PROGRAMME LINÉAIRE EN NOMBRES ENTIERS (PLNE)

La solution optimale se trouve sur un point qui n'est pas forcément un sommet.

$$\text{Max } c^T x$$

$$Ax \leq b$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

$$x_1, x_2, \dots, x_p : \textit{entiers}$$

Le problème n'est plus forcément polynomial et une recherche arborescente est souvent nécessaire pour trouver la solution optimale.

# EXEMPLE DE LA CIMENTERIE

$$\text{Max } z = 50x_1 + 70x_2$$

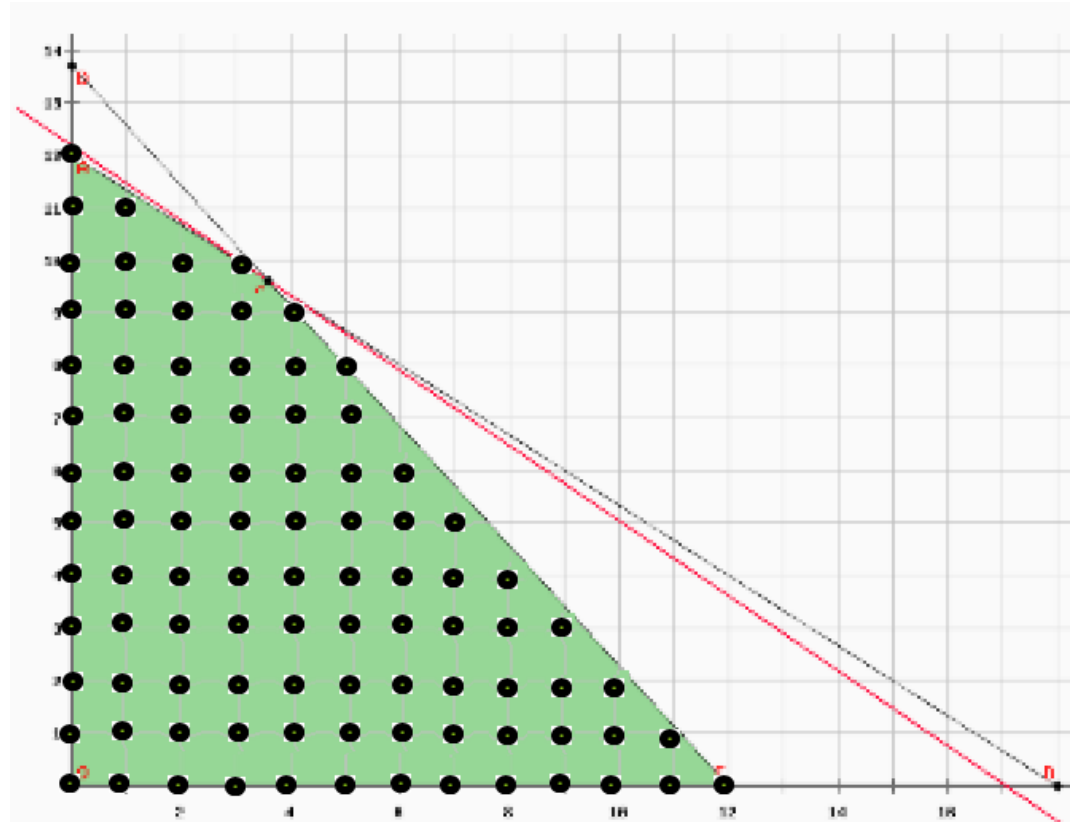
$$20x_1 + 30x_2 \leq 360$$

$$40x_1 + 35x_2 \leq 480$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$x_1$  et  $x_2$  : entiers

La solution (3.6, 9.6) n'est plus réalisable.



# EXEMPLE DE LA CIMENTERIE

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z &= 50x_1 + 70x_2 \\
 20x_1 + 30x_2 &\leq 360 \\
 40x_1 + 35x_2 &\leq 480 \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$x_1 \leq 3$$

$$(3.6, 9.6) \rightarrow Z = 852$$

$$x_1 \geq 4$$

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z &= 50x_1 + 70x_2 \\
 20x_1 + 30x_2 &\leq 360 \\
 40x_1 + 35x_2 &\leq 480 \\
 x_1 &\leq 3
 \end{aligned}$$

$$(3, 10) \rightarrow Z = 850$$

La solution optimale

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z &= 50x_1 + 70x_2 \\
 20x_1 + 30x_2 &\leq 360 \\
 40x_1 + 35x_2 &\leq 480 \\
 x_1 &\geq 4
 \end{aligned}$$

$$(4, 9.14) \rightarrow Z = 840$$

Un sous espace dominé

# LINÉARISATION

On peut introduire une variable binaire  $y$  pour représenter une variable  $x$  qui peut être nulle ou être comprise entre deux valeurs  $L$  et  $M$  :

$$Ly \leq x \leq My$$

$$y = 1 \quad \rightarrow \quad L \leq x \leq M$$

$$y = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$

# LINÉARISATION

On peut introduire  $n$  variables binaires  $y_1, y_2, \dots, y_n$  pour représenter le fait qu'une variable  $x$  prend ses valeurs dans un espace discret de nombres réels  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

$$x = \sum_{i=1}^n v_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = 1$$

# LINÉARISATION

- ✓ La puissance d'une variable  $x^n$  peut être remplacée par  $x$  pour une variable binaire.
- ✓ Le produit  $z$  de deux variables binaires  $x$  et  $y$  peut être linéarisé de la manière suivante :

$$z = xy \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z \leq x \\ z \leq y \\ z \geq x + y - 1 \end{cases}$$

# LINÉARISATION

On introduit les variables binaires  $x_a$  et  $x_b$  pour modéliser le fait que deux évènements  $a$  et  $b$  ne peuvent pas se produire simultanément :  $x_a + x_b \leq 1$

Au moins  $a$  ou  $b$  doit se produire :  $x_a + x_b \geq 1$

Si  $a$  se produit alors  $b$  se produit :  $x_a \leq x_b$

Si  $a$  se produit alors  $b$  ou  $c$  se produit :  $x_a \leq x_b + x_c$

Si  $a$  se produit alors  $b$  et  $c$  se produisent :  $2x_a \leq x_b + x_c$

# LINÉARISATION

Si  $a$  ne se produit pas alors  $y$  est nulle :  $y \leq x_a M$ ,  $M$  grand.

La borne inférieure  $z$  d'un ensemble de combinaisons linéaires :

$Max\ z$

$$z \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Satisfaire  $k$  contraintes parmi  $m$  :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i + M_i(1 - y_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

$$\sum_{i=1}^m y_i = k.$$

Les chiffres  $M_i$  doivent être pris suffisants grands pour banaliser les contraintes non respectées, pour lesquelles les variables binaires  $y_i$  valent 0.