

Prof. Mohamed Aly LOULY

Recherche Opérationnelle

1

- ✓ La Résolution Algébrique
- ✓ La Méthode du Simplexe à une phase

VARIABLES DE BASE ET HORS-BASE

- On appelle base de A , ou matrice de base, toute sous matrice carrée inversible B , $m \times m$ de A .
- On partitionne A sous la forme suivante : $A = (B \ N)$
- Les variables dont les colonnes sont dans B sont appelées **variables de base**.
- Les autres variables sont appelées **variables hors-base**.
- On partitionne de la même manière les vecteurs x et c .

FORME AVEC BLOCKS MATRICIELS

Soit le problème :

$$(P) : \begin{cases} \text{Max } z = cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Il peut être réécrit ainsi :

$$(P) : \begin{cases} \text{Max } z = (c_B \quad c_N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \\ (B \quad N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

MÉTHODE ALGÈBRIQUE

- On appelle solution réalisable de base de P tout vecteur $x \geq 0$ qui satisfait les contraintes $Ax=b$.
- Il y a au plus C_n^m solutions réalisables de base. C'est le nombre des choix possibles de m variables de base parmi les n possibles. Pour 400 variables et 100 contraintes cela est de l'ordre d'un google 10^{100} . C'est plus que le nombre des particules de l'univers 10^{80} .

EXPRESSIONS EN FONCTION DES VARIABLES HORS BASE

Finalelement :

$$(P) : \begin{cases} \text{Max } z = c_B x_B + c_N x_N \\ Bx_B + Nx_N = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

Donc :

$$z = c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N$$

On note alors :

$$\overline{c_N} = c_N - c_B B^{-1}N$$

BASE ET SOLUTIONS DE BASE

Le programme linéaire **P** s'écrit par rapport à la base **B** sous la forme :

$$(P) : \begin{cases} \text{Max } z = c_B B^{-1} b + (c_N - c_B B^{-1} N) x_N \\ x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N \\ x_B, x_N \geq 0 \end{cases}$$

La solution **x** associée à la base **B** est la suivante :

$$x_N = 0$$

$$x_B = B^{-1} b$$

$$z = c_B B^{-1} b$$

SOLUTION OPTIMALE

Théorème :

L'ensemble des points extrêmes du polytope, correspond à l'ensemble des solutions de base réalisables.

Théorème :

Si $\overline{c_N} \leq 0$ alors la solution de base réalisable correspondante est la solution optimale.

EXEMPLE D'APPLICATION

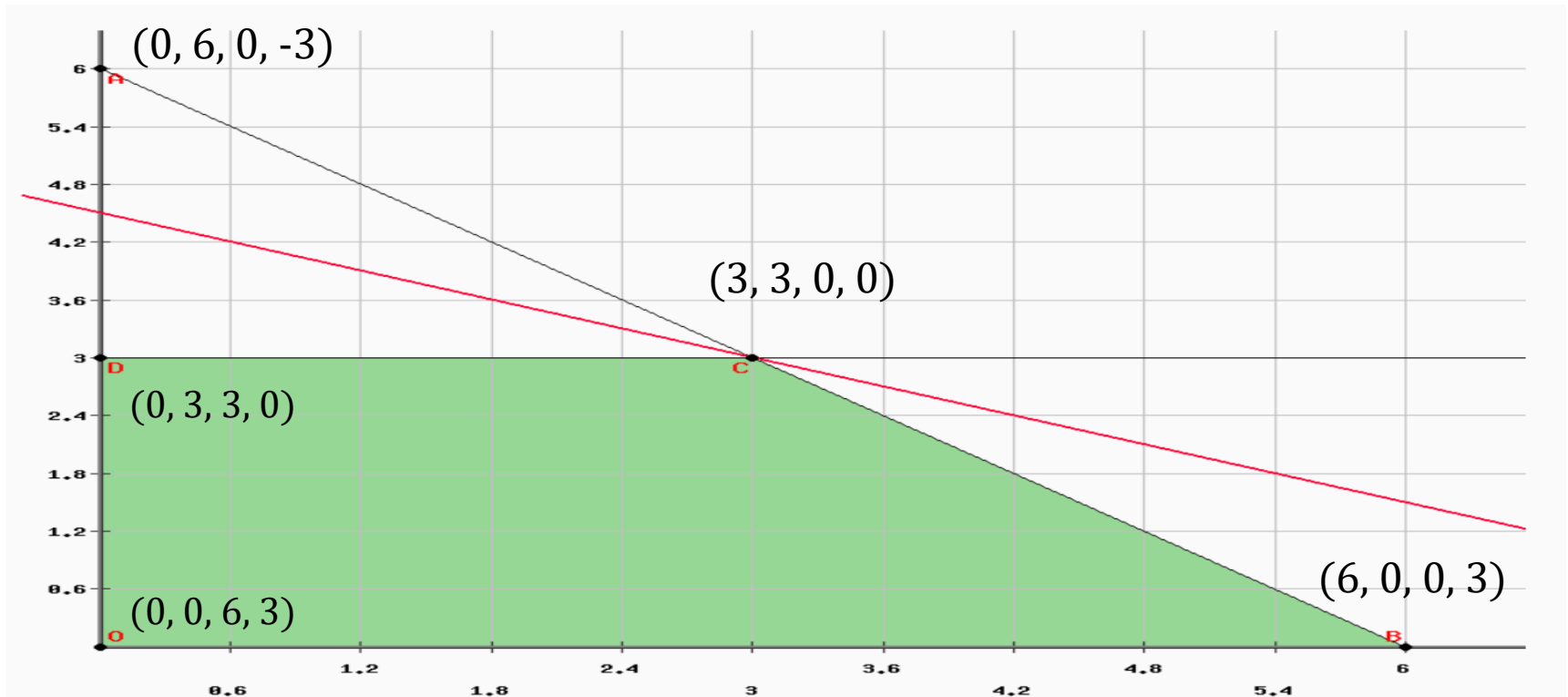
Considérons le programme linéaire (PL) ci-dessous :

$$(PL) \begin{cases} \text{Max } z = x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(PL) \begin{cases} \text{Max } z = x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 + e_1 = 6 \\ x_2 + e_2 = 3 \\ x_1, x_2, e_1, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

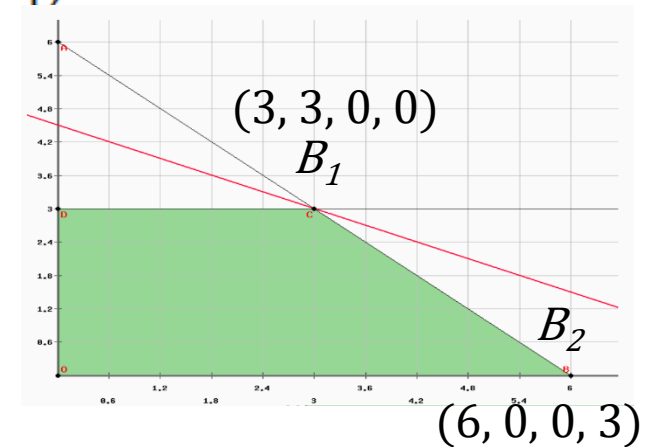
- Déterminer toutes les solutions de base réalisables SBR
- Donner la solution de base optimale

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE



EXEMPLE D'APPLICATION

- La matrice A est définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Les bases réalisables sont
 - La première base réalisable
 - $B_1 = (A^1, A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 - $x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$
 - $(A^1, A^3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une base car les colonnes ne sont pas linéairement indépendantes ($\det (A^1, A^3) = 0$)
 - La deuxième base réalisable
 - $B_2 = (A^1, A^4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $O(0, 0)$
 - $x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$



EXEMPLE D'APPLICATION

- La troisième base réalisable

- $B_3 = (A^2, A^3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

- La quatrième base n'est pas réalisable

- $B_4 = (A^2, A^4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

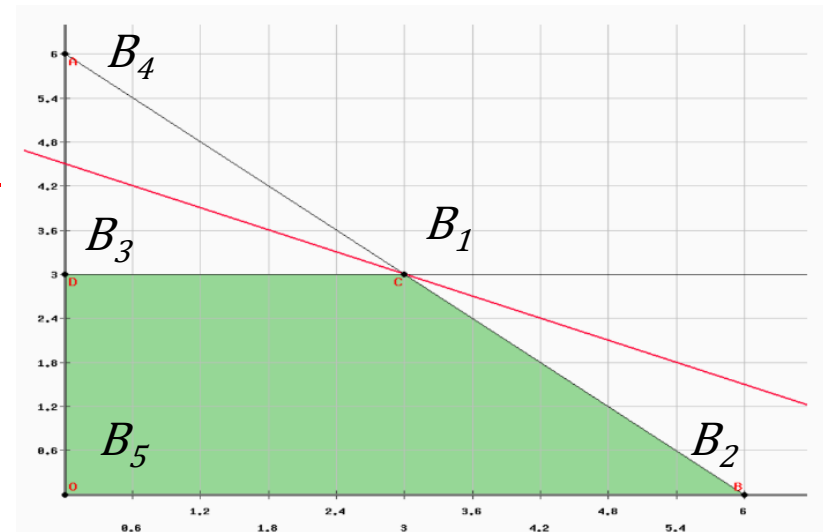
- $x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$



- La cinquième base réalisable

- $B_5 = (A^3, A^4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$



EXEMPLE D'APPLICATION

Calculons $\overline{c_N} = c_N - c_B B^{-1} N$ et $z = c_B B^{-1} b$:

La première base : $\overline{c_N} = -(1 \ 1)$ et $z_1 = 9$

La deuxième base : $\overline{c_N} = (1 \ -1)$ et $z_2 = 6$

La troisième base : $\overline{c_N} = (1 \ -2)$ et $z_3 = 6$

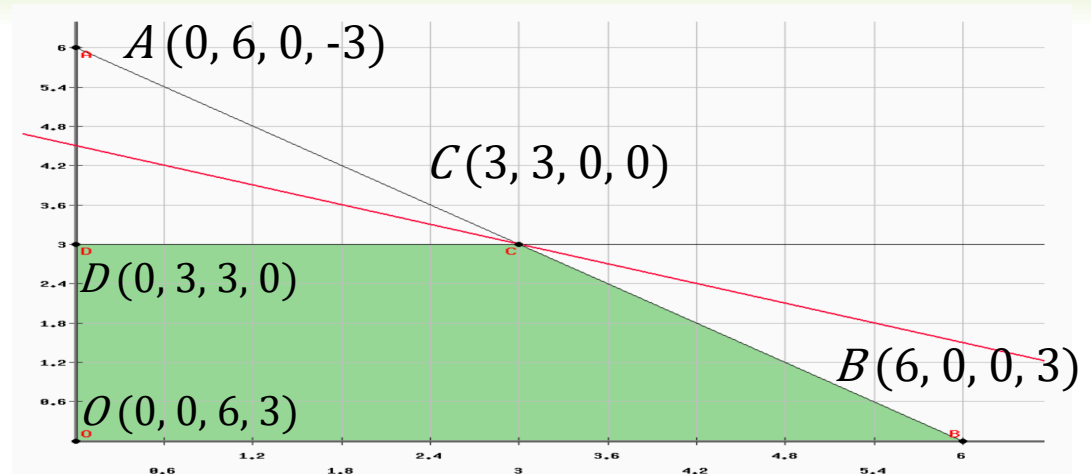
La cinquième base : $\overline{c_N} = (1 \ 2)$ et $z_5 = 0$

LA MÉTHODE DU SIMPLEXE

- Publié par Dantzig en 1949.
- Fonctionne sur la forme standard du PL.
- Un algorithme itératif qui améliore la fonction-objectif à chaque itération en passant d'un sommet à un meilleur sommet voisin.
- L'algorithme du simplexe est très efficace en pratique avec un temps de calcul empirique : un nombre d'itérations généralement entre $2m$ et $3m$.
- Il est cependant théoriquement exponentiel dans le pire cas, alors que le problème est de complexité polynomiale.

LA MÉTHODE DU SIMPLEXE

$$(PL) \begin{cases} \text{Max } z = x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 + e_1 = 6 \\ x_2 + e_2 = 3 \\ x_1, x_2, e_1, e_2 \geq 0 \end{cases}$$



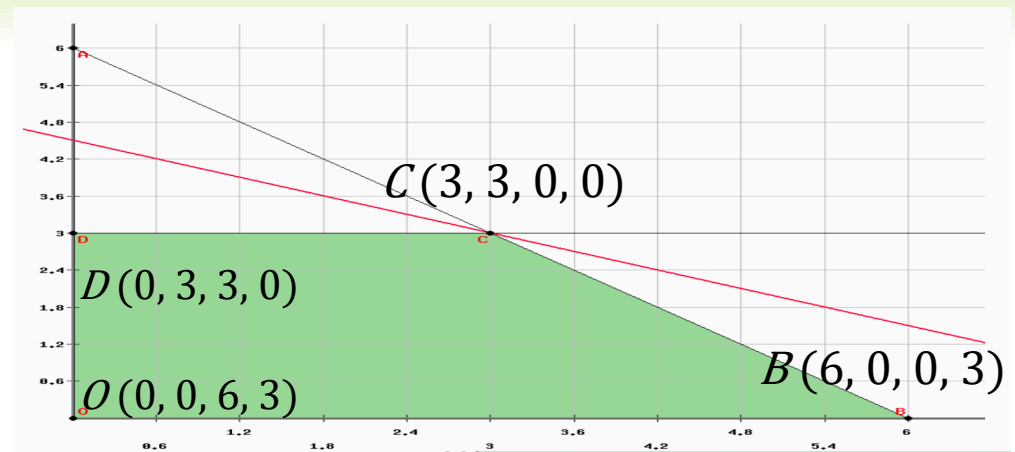
- Chaque sommet est une solution basique **SB** qui contient au moins $(n-m)$ **zéros**, représentant les variables hors-base.
- Une **SB** est réalisable (**SBR**) si toutes ses valeurs sont positives.
- La **SB** initiale la plus évidente est celle pour laquelle les variables initiales sont nulles, mais cette SB n'est pas toujours une **SBR**.

LA MÉTHODE DU SIMPLEXE

$$e_1 = 6 - x_1 - x_2$$

$$e_2 = 3 - x_2$$

$$z = 0 + x_1 + 2x_2$$



- On commence par la base évidente formée par les variables d'écart e_1 et e_2 .
- La fonction z et les variables de base sont réécrites en fonctions des variables hors base x_1 et x_2 .
- La SBR initiale est obtenue en mettant les variables hors base à zéro : $SBR_0 = (0, 0, 6, 3)$ et $z = 0$.

LA MÉTHODE DU SIMPLEXE

- Pour aller d'une SBR_0 à une nouvelle SBR_1 , une variable entre dans la base et une variable en sort.
- La variable entrante augmente sa valeur et la variable sortante devient égale à zéro. Cette opération de pivotage peut se voir comme un zéro qui se déplace dans la solution.
- Géométriquement, on se déplace d'un sommet du polyèdre vers un sommet adjacent.

LA MÉTHODE DU SIMPLEXE

- La variable entrante est celle qui donne le profit unitaire maximal dans l'expression de la fonction-objectif z , ici x_2 .
- La variable sortante est la première qui s'annule en augmentant la valeur de la variable entrante, ici e_2 .
- La fonction z et les nouvelles variables de base x_2 et e_1 sont alors réécrites en fonctions des variables hors base x_1 et e_2 .

$$e_1 = 6 - x_1 - x_2$$

$$e_2 = 3 - x_2$$

$$z = 0 + x_1 + 2x_2$$



$$e_1 = 3 - x_1 + e_2$$

$$x_2 = 3 - e_2$$

$$z = 6 + x_1 - 2e_2$$

- La nouvelle **SBR** est obtenue en mettant les nouvelles variables hors base à zéro : **SBR**₁ = (0, 3, 3, 0) et $z = 6$.

LA MÉTHODE DU SIMPLEXE

- A la nouvelle itération, la variable entrante est x_1 car c'est la seule qui a un profit unitaire strictement positif.
- La variable sortante est e_1 qui s'annule quand x_1 devient 3.

$$\begin{aligned}e_1 &= 3 - x_1 + e_2 \\x_2 &= 3 - e_2 \\z &= 6 + x_1 - 2e_2\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}x_1 &= 3 - e_1 + e_2 \\x_2 &= 3 - e_2 \\z &= 9 - e_1 - e_2\end{aligned}$$

- La nouvelle **SBR** est : $SBR_2 = (3, 3, 0, 0)$ et $z = 9$.
- C'est la solution optimale car toutes la variables hors bases ont un profit unitaire négatif.

LE TABLEAU DU SIMPLEXE

$$(PL) \begin{cases} \text{Max } z = x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 + e_1 = 6 \\ x_2 + e_2 = 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

A partir du tableau qui correspond à la SBR_0 non optimale, on fait un pivotage entre une variable qui entre dans la base et une variable qui en sort.

La variable sortante est celle qui a le rapport b_i/a_{ij} le plus petit pour $a_{ij} > 0$

Base	X1	X2	E1	E2	b
E1	1	1	1	0	6
E2	0	1	0	1	3
Profit	1	2	0	0	Z = 0



La variable entrante est celle qui a le plus grand $c_j > 0$

LE TABLEAU DU SIMPLEXE

$$e_1 = 6 - x_1 - x_2$$

$$e_2 = 3 - x_2$$

$$z = 0 + x_1 + 2x_2$$

Base	X1	X2	E1	E2	b
E1	1	1	1	0	6
E2	0	1	0	1	3
Profit	1	2	0	0	Z = 0

$$e_1 = 3 - x_1 + e_2$$

$$x_2 = 3 - e_2$$

$$z = 6 + x_1 - 2e_2$$

Base	X1	X2	E1	E2	b
E1	1	0	1	-1	3
X2	0	1	0	1	3
Profit	1	0	0	-2	Z = 6

LE TABLEAU DU SIMPLEXE

$$e_1 = 3 - x_1 + e_2$$

$$x_2 = 3 - e_2$$

$$z = 6 + x_1 - 2e_2$$

Base	X1	X2	E1	E2	b
E1	1	0	1	-1	3
X2	0	1	0	1	3
Profit	1	0	0	-2	Z = 6

$$x_1 = 3 - e_1 + e_2$$

$$x_2 = 3 - e_2$$

$$z = 9 - e_1 - e_2$$

Base	X1	X2	E1	E2	b
X1	1	0	1	-1	3
X2	0	1	0	1	3
Profit	0	0	-1	-1	Z = 9

CAS PARTICULIER DES SOLUTIONS MULTIPLES

Un optimum avec un zéro comme coefficient d'une variable non-basique dans la fonction objectif indique une infinité de solutions.

$$x_1 = 3 - e_1 + e_2$$

$$x_2 = 3 - e_2$$

$$z = 9 - e_1$$

	X1	X2	E1	E2	
X1	1	0	1	-1	3
X2	0	1	0	1	3
Z	0	0	-1	0	9

$$x_1 = 6 - e_1 - x_2$$

$$e_2 = 3 - x_2$$

$$z = 9 - e_1$$

	X1	X2	E1	E2	
X1	1	1	1	0	6
E2	0	1	0	1	3
Z	0	0	-1	0	9

CAS PARTICULIER DES PROBLÈMES NON-BORNÉS

L'absence d'un coefficient strictement positif dans la colonne du pivot signifie que le problème n'est pas borné et qu'il n'y a donc pas de maximum pour la fonction objectif.

$$\begin{aligned}e_1 &= 3 + x_1 + e_2 \\x_2 &= 3 - e_2 \\z &= 6 + x_1 - 2e_2\end{aligned}$$

Base	X1	X2	E1	E2	b
E1	-1	0	1	-1	3
X2	0	1	0	1	3
Profit	1	0	0	-2	Z = 6

EXEMPLES

Résoudre le PL de la cimenterie et les PLs suivants avec l'algorithme du Simplexe sous forme de tableau.

PL 1

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 3x_1 + 5x_2 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 + 7x_2 &\leq 15 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

PL 2

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 12x_1 + 9x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 20 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

PL 3

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 7x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 10 \\ 6x_1 + 4x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$