

Prof. Mohamed Aly LOULY

Recherche Opérationnelle

1

Résolution Graphique d'un PL

RÉSOLUTION GRAPHIQUE

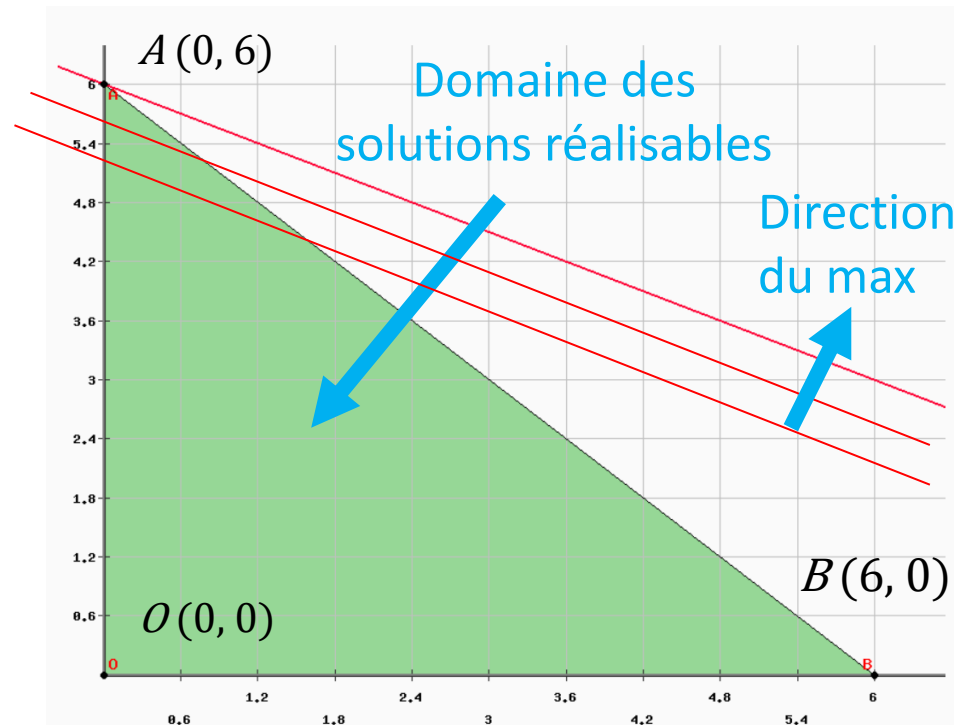
Le polygone le plus simple : triangle (Simplexe de 2 dimensions)

$$\text{Max } z = x_1 + 2x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

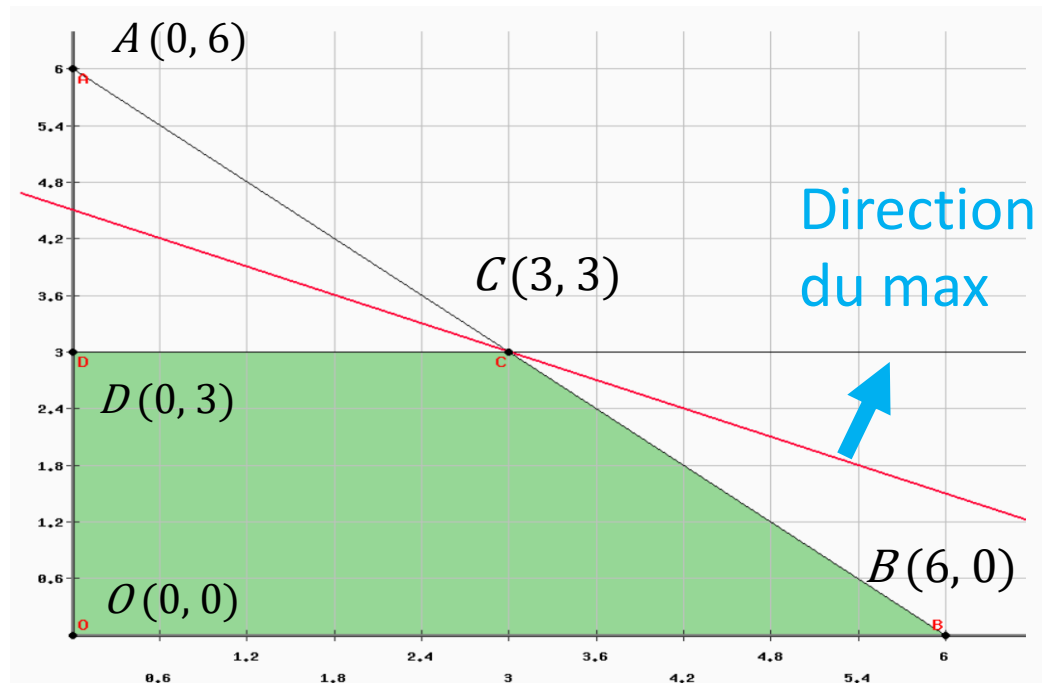
Si le PL admet une solution optimale, alors elle est atteinte sur un sommet.



RÉSOLUTION GRAPHIQUE

Le cas général à deux variables : un polygone convexe

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

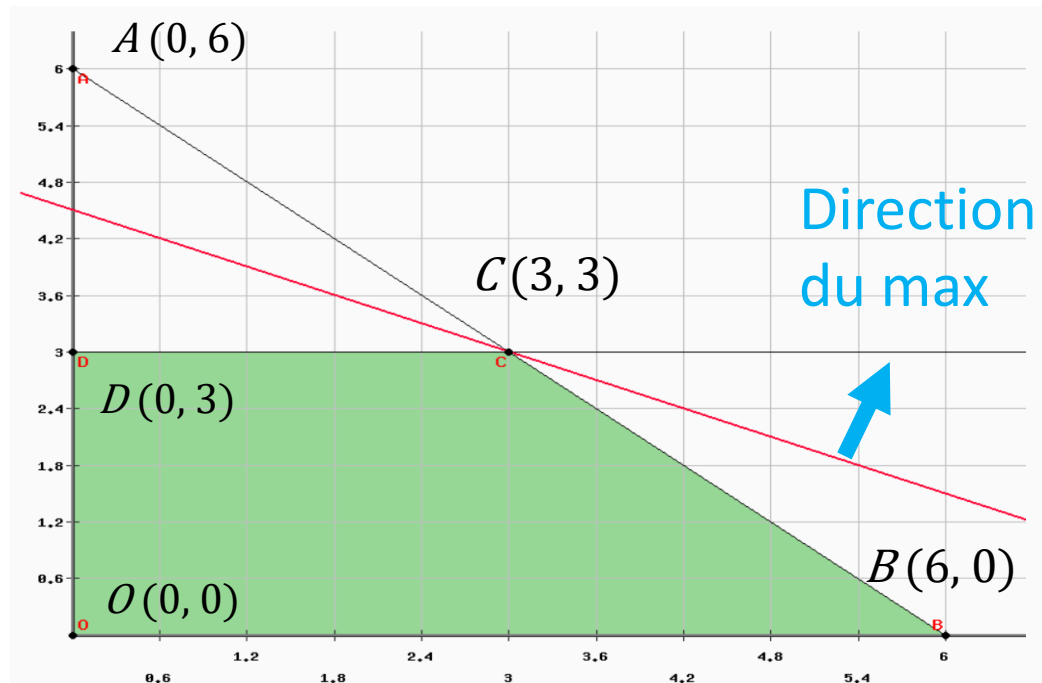


Le cas général à n variables : un polyèdre convexe

RÉSOLUTION GRAPHIQUE

Le cas général à deux variables : un polygone convexe

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z &= x_1 + 2x_2 \\
 x_1 + x_2 &\leq 6 \\
 x_2 &\leq 3 \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$



Le cas général à n variables : un polyèdre convexe

RÉSOLUTION GRAPHIQUE

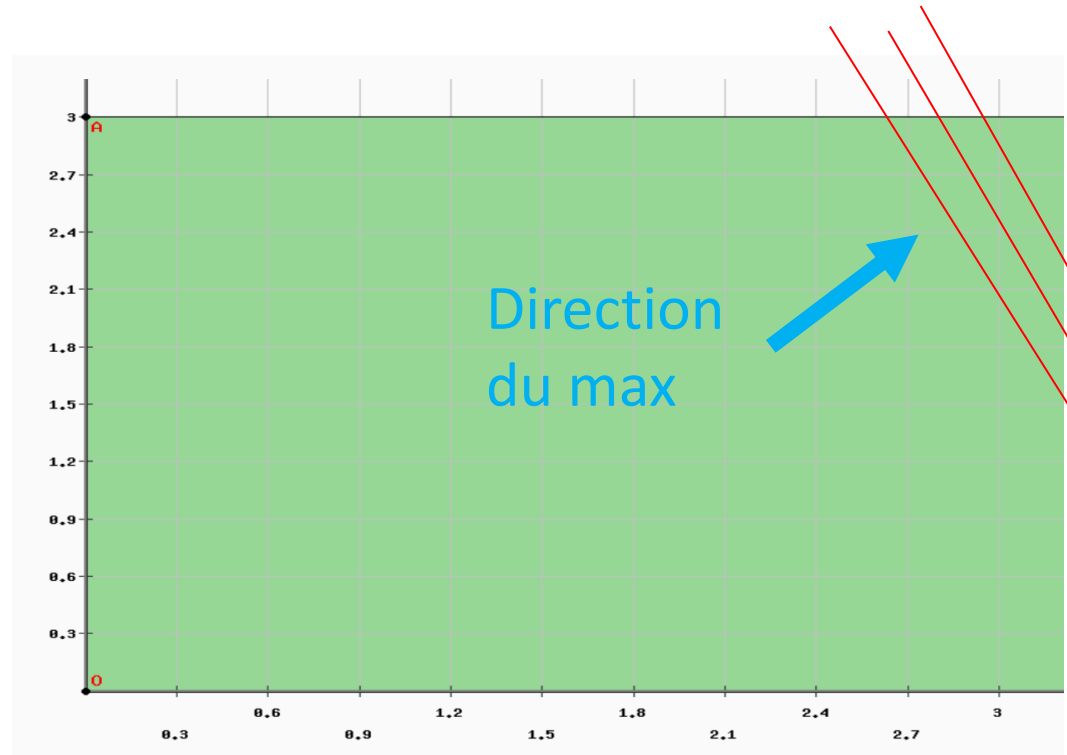
Cas spécial : un domaine non borné et pas de maximum

$$\text{Max } z = x_1 + 2x_2$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

On peut indéfiniment augmenter la fonction-objectif sans violer les contraintes. Il n'y a donc pas de solution optimale. En effet, on peut toujours augmenter x_1 .

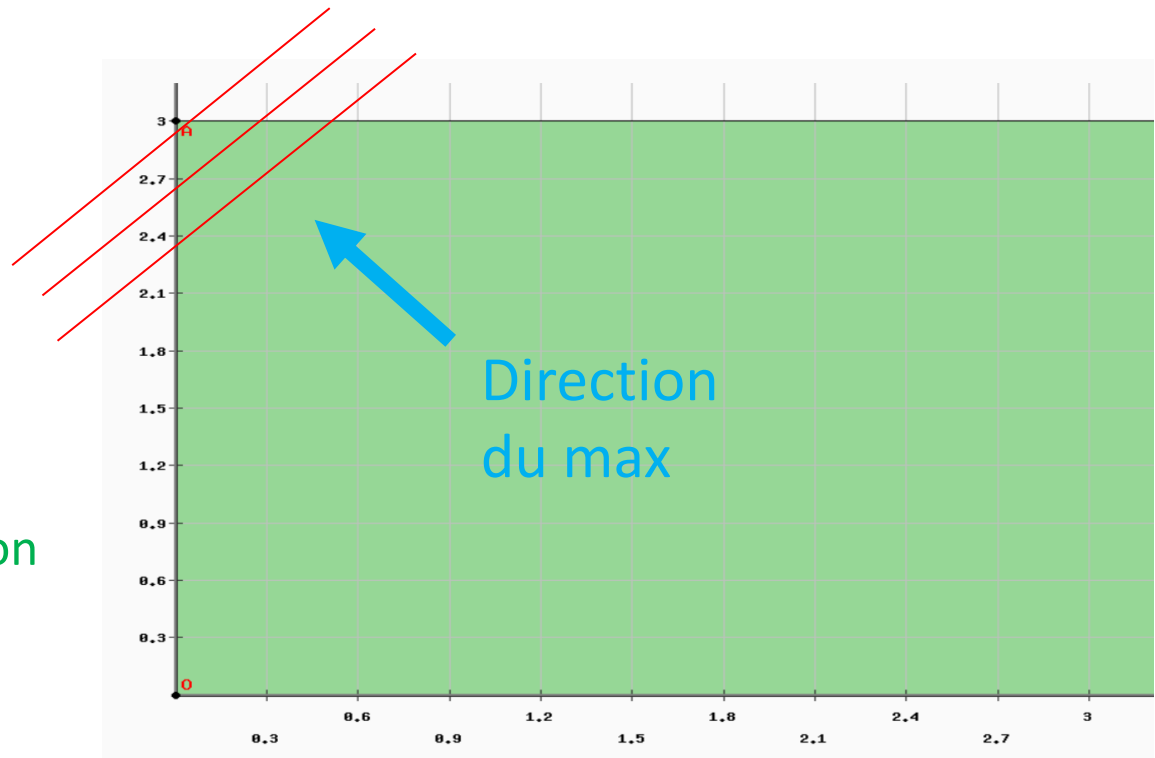


RÉSOLUTION GRAPHIQUE

Cas spécial : existence d'un maximum sur un domaine non borné

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= -x_1 + 2x_2 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La direction de la maximisation est bornée.



RÉSOLUTION GRAPHIQUE

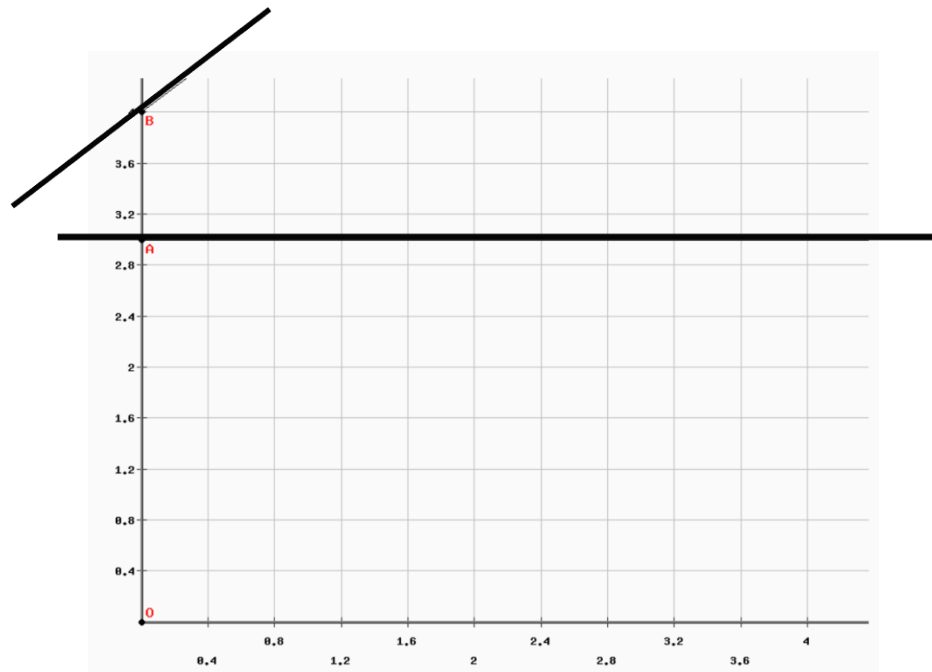
Cas spécial : le domaine des solutions réalisables est vide.

$$\text{Max } z = x_1 + 2x_2$$

$$x_1 - x_2 \leq -4$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

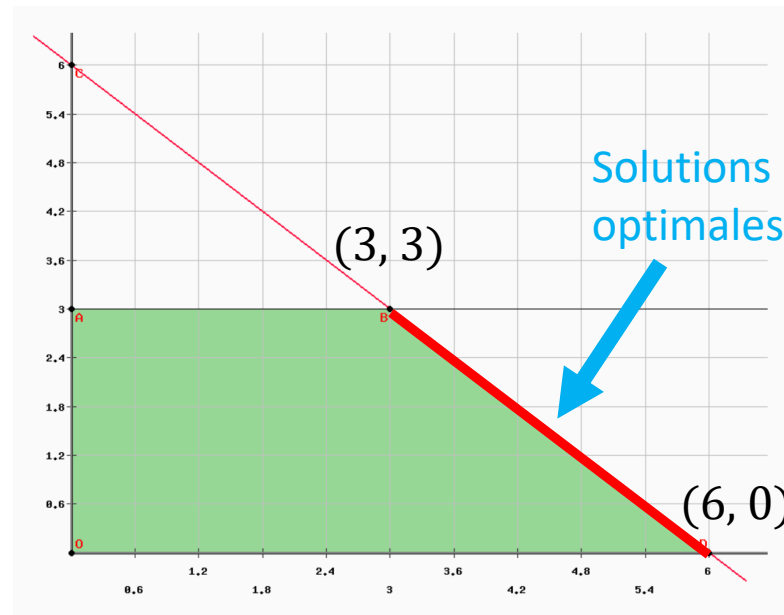


Il n'y a pas de solution qui satisfait toutes les contraintes.

RÉSOLUTION GRAPHIQUE

Cas spécial : plusieurs solutions optimales

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

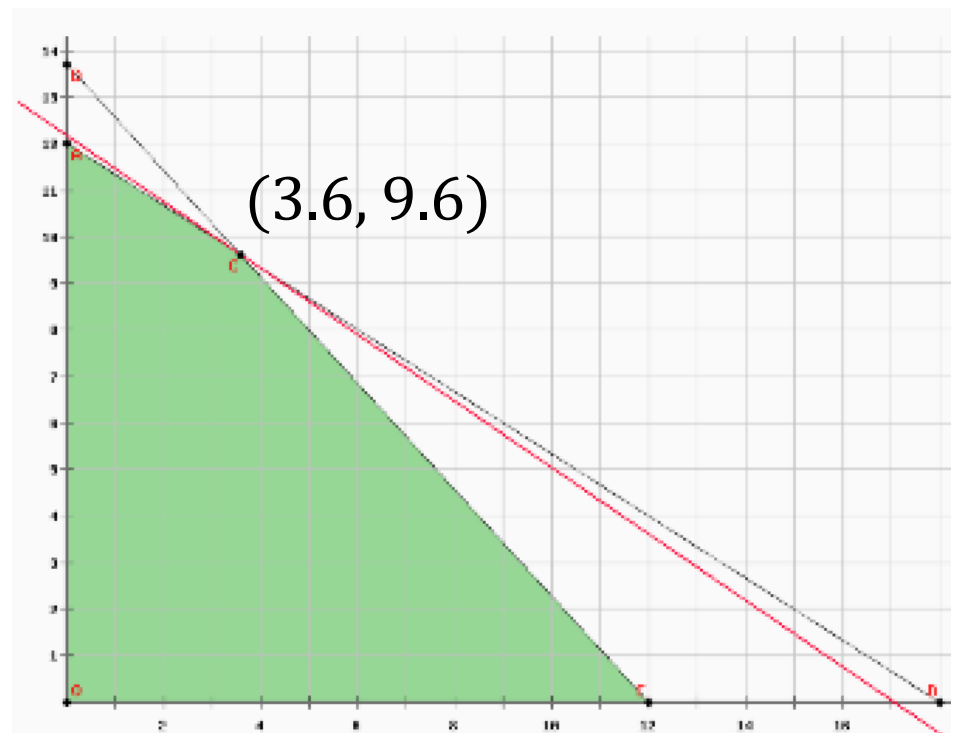


Il existe toujours un sommet optimal dans ce cas

RÉSOLUTION GRAPHIQUE

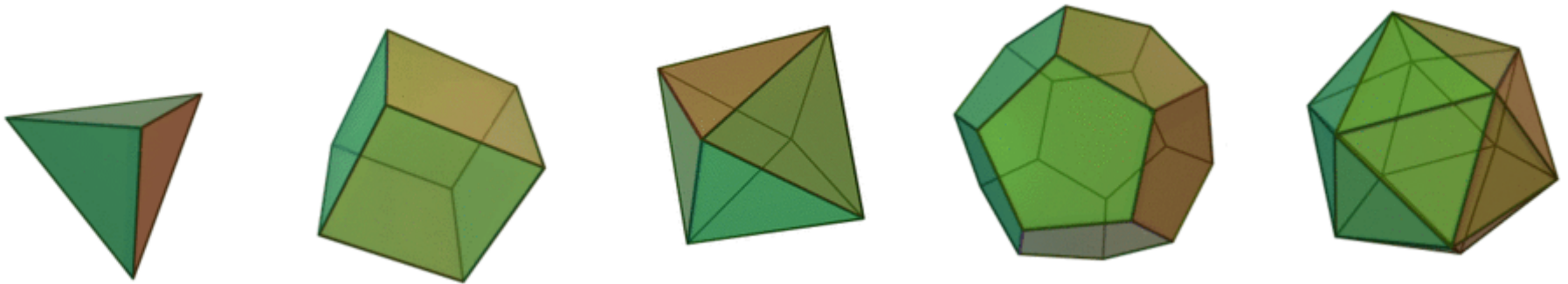
L'exemple de la cimenterie

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 50x_1 + 70x_2 \\ 20x_1 + 30x_2 &\leq 360 \\ 40x_1 + 35x_2 &\leq 480 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



RÉSOLUTION GRAPHIQUE

Exemple de polyèdres bornés dans $\mathbb{R}^3$: les 5 solides de Platon. Ce sont des polyèdres convexes réguliers avec 4, 6, 8, 12 et 20 faces identiques.



Attention

Le nombre de sommets d'un polyèdre de $\mathbb{R}^n$ peut être exponentiel !

RÉSOLUTION GRAPHIQUE

Résoudre les PLs suivants avec la méthode graphique

PL 1

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 3x_1 + 5x_2 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 + 7x_2 &\leq 15 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

PL 2

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 12x_1 + 9x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 20 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

PL 3

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 7x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq -10 \\ 6x_1 + 4x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$