



Institut Supérieur du Numérique  
Département Communication Numérique et Multimédia

# TECHNOLOGIE MULTIMÉDIA AVANCÉES

## PLAN:

**chapitre 1 : INTRODUCTION GÉNÉRALE AUX SIGNAUX MULTIMÉDIA**

**chapitre 2 : CLASSIFICATION DES SIGNAUX MULTIMÉDIA**

**chapitre 3 : TYPES DES SYSTÈMES**

**chapitre 4 : TRANSFORMATION EN Z**

**chapitre 5 : TRANSFORMATION DE FOURIER**

**chapitre 6 : MISE EN PRATIQUE AVEC DES LOGICIELS DE MULTIMÉDIA AVANCÉE**

EL BENANY Mohamed Mahmoud

[medmhdbennannu@gmail.com](mailto:medmhdbennannu@gmail.com)

## CHAPITRE 4 : TRANSFORMÉ EN Z

1. Définition de Z-Transform
2. Relation entre le plan Z et le plan S
3. Région de convergence (ROC) de la Transformation en Z
4. Exercices: TD
  1. Exercices 1: Z-transfom de  $u[n]$  et  $u[-n-1]$
  2. Exercices 2: Transformé en Z d'un signal d'un signal à temps discret
  3. Exercices 3: Transformé en Z d'une séquence finie
  4. Exercices 4: Transformé en Z d'un fonction sinusoïdale
5. Propriétés de Z-transform
6. Problème de Z-transfom
7. Z-transfom Inverse (IZT)
  1. Inverse Z-transfom: Méthode d'expansion de fraction partielle
8. La convolution
  1. Propriétés
  2. Types de convolution

## Qu'est ce que la Transformation en Z

- La transformée en Z (Z-Transform) est un outil mathématique utilisé pour convertir les équations différentielles dans le domaine temporel en équations algébriques dans le domaine  $z$ .
- Z-Transform est utilisée pour convertir le domaine temporel au domaine fréquentiel d'un signal à temps discret.

# 1. Définition de Z-Transform

---

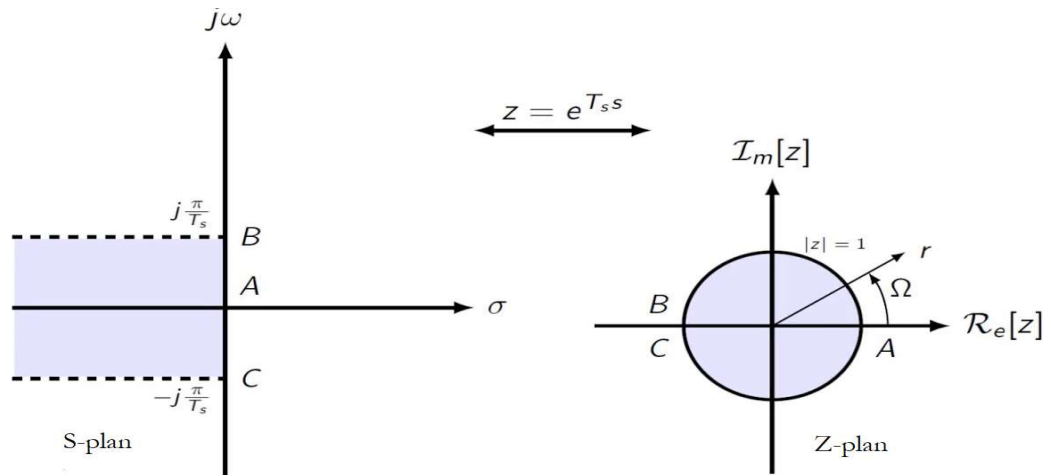
Domaine temporel  $\xrightarrow{\text{Z-Transform}}$  domaine fréquentiel

DTS :  $x[n]$   $\xrightarrow{\text{Z-Transform}}$   $X[z]$  : Z-domain

CTS :  $x(t)$   $\xrightarrow{\text{Laplace Transform}}$   $X[s]$  : S-domain

$$s = \sigma + j\omega$$

S-domain ou  
la forme rectangulaire



$X[z]$  : Z-domain ou  
la forme polaire

$$z = \delta e^{j\omega}$$

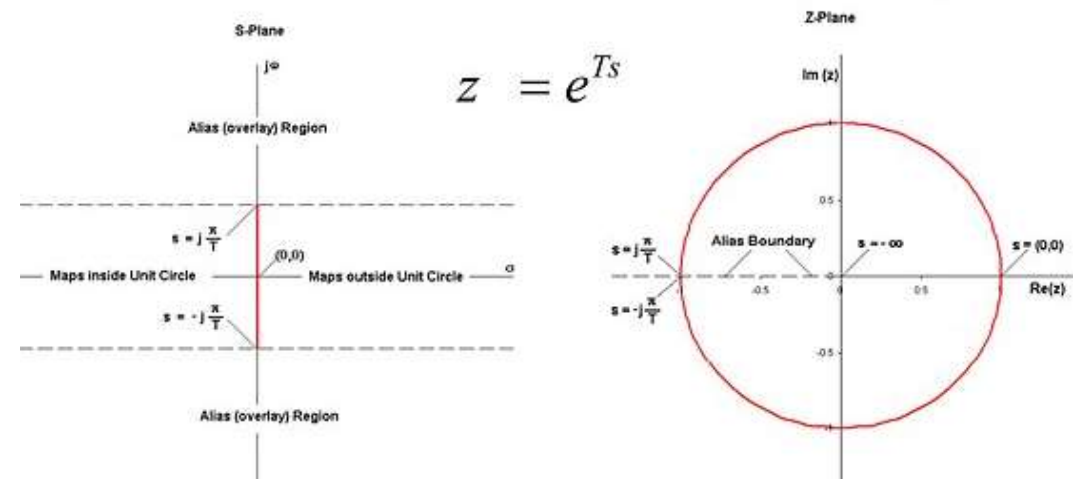
## 2. Relation entre le plan Z et le plan S

### Relation entre S-plane et Z-plane

$$\begin{array}{|l} s = \sigma + j\omega \\ e^s = e^\sigma e^{j\omega} \end{array} \quad z = \delta e^{j\omega}$$

- Si  $\sigma=0$  alors l'équivalent du S-plane en Z-plan est le cercle unitaire
- Si  $\sigma > 0$  alors l'équivalent du S-plane en Z-plan est la surface extérieur du cercle unitaire
- Si  $\sigma < 0$  alors l'équivalent du S-plan en Z-plan est la surface à l'intérieur de cercle unitaire

$$\begin{array}{l} s = \sigma + j\omega \\ z = \delta e^{j\omega} \gg \delta = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \end{array}$$



### **3. Région de convergence (ROC) de la Transformation en Z**

L'ensemble de points dans le plan  $z$  pour lesquels la transformée en Z d'une séquence en temps discret  $x(n)$ , c.à.d.  $X(z)$ , converge, est appelée la région de convergence (ROC) de  $X(z)$ .

#### **ROC définit les limites du domaine fréquentiel**

#### **Propriétés:**

1. ROC est définie à l'intérieur du cercle unitaire ou à l'extérieur du cercle unitaire.
2. ROC de la transformée en Z ne peut contenir aucun pôle.

#### **Exemples:**

- $U[n]$  est définie dans  $[0, +\infty[$ , donc ROC est  $|z| > 1$ , les pôles réels
- $U[-n - 1]$  est définie dans  $]-\infty, 1]$ , donc ROC est  $|z| < 1$ , les pôles réels

## Exercices: Z-transfom de $u[n]$ et $u[-n-1]$

$$L.T [x(t)] = X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$$Z.T [x[n]] = X[z] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

$$Z.T \text{ unilatéral } [x[n]] = X[z] = \sum_0^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

### Exemple 1:

Soit un signal  $x[n] = u[n]$ ,

1. Montrer que  $Z[u[n]] = X[z] = \frac{z}{z-1}$
2. Quelle est la condition sur  $Z$  par laquelle la ROC de  $X[z]$  est définie
3. Faire la représentation graphique sur  $Z$ -plane

### Exemple 2:

Soit un signal  $x[n] = u[-n-1]$ ,

1. Montrer que  $Z[u[-n-1]] = X[z] = \frac{-z}{z-1}$
2. Quelle est la condition sur  $Z$  par laquelle la ROC de  $X[z]$  est définie
3. Faire la représentation graphique sur  $Z$ -plane

## Exercices: Transformé en Z d'un signal d'un signal à temps discret

---

1. Soit un signal  $x[n] = a^n u[-n - 1]$ ,
  - Montrer que  $Z[a^n u[-n - 1]] = X[z] = \frac{-z}{z-a}$
  - Quel est la condition sur Z par laquelle la ROC de X[z] est définie
2. Soit un signal  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ , trouver  $X[z]$ ? Et Faire la représentation graphique dans le Z-plane
3. Soit un signal  $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n - 1]$ , trouver  $X[z]$ ? Et Faire la représentation graphique dans le Z-plane
4. Soit un signal  $x[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n - 1] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n - 1]$ , trouver  $X[z]$ ? Et Faire la représentation graphique dans le Z-plane

## Exercices: Transformé en Z d'une séquence finie

---

1. Soit un signal  $x[n] = \{-1, 2, 3, -1\}$ ,
  - Trouver  $Z[x[n]] = X[z]$
  - Quelle est la condition sur  $Z$  par laquelle ROC de  $X[z]$  est définie
2. Soit un signal  $x[n] = \{-1, 2, 3, -1\}$ ,
  - Trouver  $Z[x[n]] = X[z]$
  - Quelle est la condition sur  $Z$  par laquelle ROC de  $X[z]$  est définie

## Exercices: Transformé en Z d'un fonction sinusoidale

1. Soit un signal  $x[n] = \cos(w_0 n)u[n]$ 
  - Trouver  $Z[x[n]] = X[z]$
  - Quelle est la condition sur  $Z$  par laquelle ROC de  $X[z]$  est définie.
2. Soit un signal  $x[n] = \sin(w_0 n)u[n]$ 
  - Trouver  $Z[x[n]] = X[z]$
  - Quelle est la condition sur  $Z$  par laquelle ROC de  $X[z]$  est définie.

## 4. Propriétés de Z-transform

---

**1. Mise à l'échelle:**  $x[n] \xrightarrow{\text{ZT}} X[z]$

Monter que :  $a^n x[n] \xrightarrow{\text{ZT}} X\left[\frac{z}{a}\right]$

**2. Décalage de temps:**

Monter que :  $x[n - m] \xrightarrow{\text{ZT}} z^{-m} X[z]$

**3. Multiplication dans le domaine temporel implique une différentiation dans le domaine fréquentiel**

Monter que :  $nx[n] \xrightarrow{\text{ZT}} -z \frac{d}{dz} X[z]$

**4. Inversion de temp**

Monter que :  $x[-n] \xrightarrow{\text{ZT}} X\left[\frac{1}{z}\right]$

#### 4. Propriétés de Z-transform (suite)

| Propriété                   | $X[n]$              | $X[z]$                                      |
|-----------------------------|---------------------|---------------------------------------------|
| Linéarité                   | $ax_1[n] + bx_2[n]$ | $aX_1[z] + bX_2[z]$                         |
| Décalage                    | $x[n - m]$          | $z^{-m}X[z]$                                |
|                             | $x[n - m]$          | $z^{-m}X[z] + z^{-m+1}x[-1] + \dots + x[m]$ |
| Mise à l' échelle           | $a^n x[n]$          | $X\left[\frac{z}{a}\right]$                 |
|                             | $x[an]$             | $X\left[z^{\frac{1}{a}}\right]$             |
| Différentiation in Z-domain | $nx[n]$             | $-z \frac{d}{dz} X[z]$                      |
| Inverse                     | $x[-n]$             | $X\left[\frac{1}{z}\right]$                 |
| Convolution                 | $x_1[n] * x_2[n]$   | $X_1[z]X_2[z]$                              |

## 5. Problème de Z-transfom

---

1. Soit un signal  $x[n] = nu[n]$ ,

□ Montrer que  $Z[nu[n]] = X[z] = \frac{z}{(z-1)^2}$

2. Trouver Z-transfom du signal  $x[n] = na^n u[n]$

## 6. Inverse Z-transform

---

La **transformée en Z inverse** est définie comme le processus de recherche du signal dans le domaine temporel  $x(n)$  à partir de sa transformée en  $X(z)$ .



### Méthodes:

1. Méthode d'expansion de fraction partielle
2. Méthode de division longue
3. Méthode des résidus

## 6. Inverse Z-transfom: Méthode d'expansion de fraction partielle

---

$$X[z] = \frac{(z-a)z}{(z-b)(z-c)} \Rightarrow \frac{X[z]}{z} = \frac{(z-a)}{(z-b)(z-c)} \Rightarrow \frac{X[z]}{z} = \frac{A}{(z-b)} + \frac{B}{(z-c)}$$

$$A = \left( \frac{X[z]}{z} \right) * (z-b)|_{z=b}$$

$$B = \left( \frac{X[z]}{z} \right) * (z-c)|_{z=c}$$

**Exercice:**

$$X[z] = \frac{10(z-1)z}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})} \quad \text{avec } |z| > \frac{1}{2}, \text{ Trouver } x[n]?$$

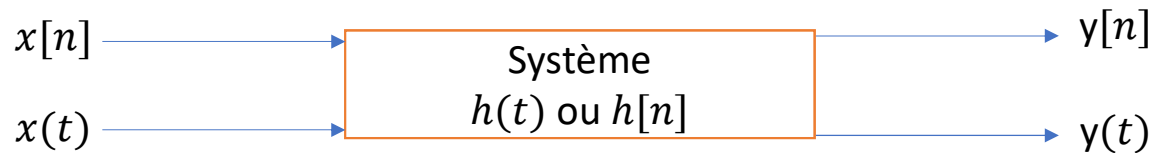
Reponse( $A = -20$ , et  $B = 30$ ))

trover  $x[n] = ?$

## Chapitre 4.1: LA CONVOLUTION

---

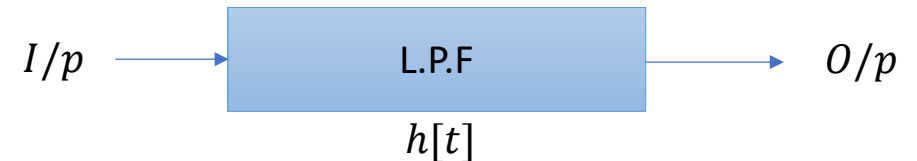
La convolution est une opération mathématique utilisée pour exprimer la relation entre l'entrée et la sortie d'un système LTI. Il relie l'entrée, la sortie et la réponse impulsionnelle d'un système LTI comme:



$$\begin{aligned}
 y[n] &= x[n] * h[n] \\
 y(t) &= x(t) * h(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau
 \end{aligned}$$

$\tau$  : scanning parameter

convolution



$$\begin{aligned}
 y[n] &= x[n] * h[n] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n - k)
 \end{aligned}$$

# LA CONVOLUTION

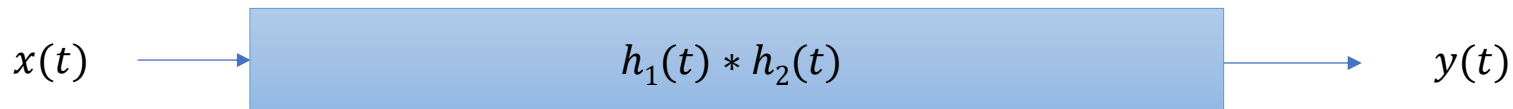
## propriétés

1.  $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$
2.  $(x(t) * h_1(t)) * h_2(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t))$

Signal continue:

$$y(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t))$$

$$Y[s] = X[s] \cdot (H_1[s] \cdot H_2[s])$$

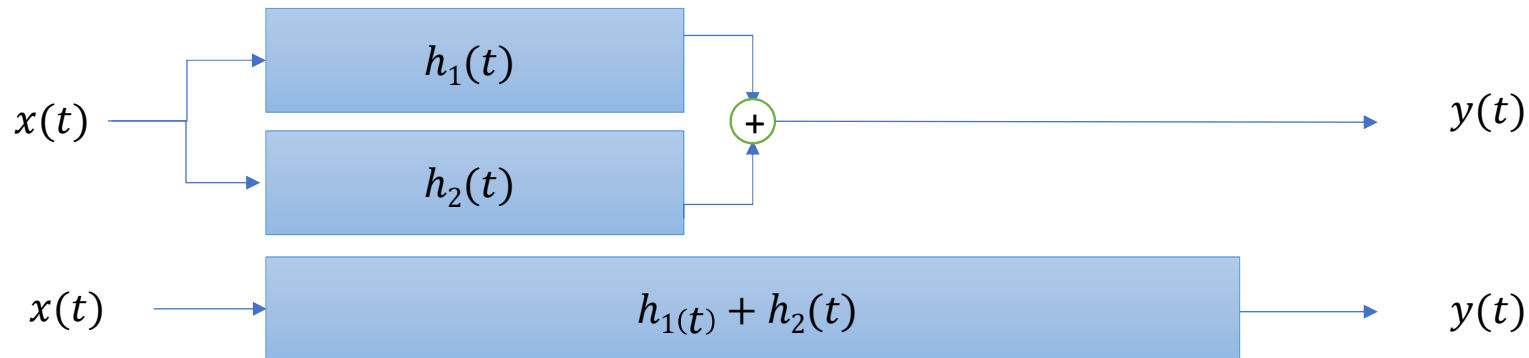


Signal discret:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y(z) = X(z) \cdot h(z)$$

3.  $x(t) * (h_1(t) + h_2(t))$
4.  $x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$



## Types de convolution

---

**Deux types de convolution existants:**

1. Convolution linéaire (pour les signaux non périodique)
2. Convolution circulaire(pour les signaux périodique)

# LA CONVOLUTION LINÉAIRE (\*)

---

$$\begin{aligned}y[n] &= x[n] * h[n] \\&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot h(n - k) \\&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot x(n - k)\end{aligned}$$

## Méthodes:

1. Méthode de représentation graphique
2. Méthode de représentation fonctionnelle
3. Méthodes de représentation de tableaux tabulaires
4. méthodes de représentation des formes tabulaires (Matrices)

## Etapas:

(1) Inverse , (2)décalage, (3)Multiplication, et (4)sommation ou intégration

# LA CONVOLUTION LINÉAIRE (\*)

---

## Etapes:

(1) Inverse , (2)décalage, (3)Multiplication, et (4)sommation ou intégration

## Conditions:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

1. Trouver  $M$  et  $N$  les longueurs des  $x[n] = M$  et  $h[n] = N$
2. Calculer  $L$  la longueur  $Y[n] = L = M + N - 1$
3. Trouver  $n_1$  et  $n_2$  les limites des départs de  $x[n] = n_1$  et  $h[n] = n_2$
4. Calculer  $n$  la limite de départ de  $Y[n] = n = n_1 + n_2$

## Exemple:

$$h[n] = \{1,2,3\}, \quad x[n] = \{1,2,-1,1\}$$

1. Trouver  $M$  et  $N$  les longueurs des  $x[n] = 4$  et  $h[n] = 3$
2. Calculer  $L$  la longueur  $Y[n] = L = 4 + 3 - 1 = 6$
3. Trouver  $n_1$  et  $n_2$  les limites des départs de  $x[n] = -1$  et  $h[n] = 0$
4. Calculer  $n$  la limite de départ de  $Y[n] = n = -1 + 0 = -1$

# LA CONVOLUTION LINÉAIRE (\*)

## Exemple:

$$h[n] = \{1, 2, 3\}, \quad x[n] = \{1, 2, -1, 1\}$$

1. Trouver  $M$  et  $N$  les longueurs des  $x[n] = 4$  et  $h[n] = 3$
2. Calculer  $L$  la longueur  $Y[n] = L = 4 + 3 - 1 = 6$
3. Trouver  $n_1$  et  $n_2$  les limites des départs de  $x[n] = -1$  et  $h[n] = 0$
4. Calculer  $n$  la limite de départ de  $Y[n] = n = -1 + 0 = -1$

## Méthodes de représentation des formes tabulaires (Matrices): Multiplication

|   | 1 | 2 | 1  | 1 |
|---|---|---|----|---|
| 1 | 1 | 2 | -1 | 1 |
| 2 | 2 | 4 | -2 | 2 |
| 3 | 3 | 6 | -3 | 3 |

$$Y[n] = \{1, 4, 6, 5, -1, 3\}$$

# LA CONVOLUTION CIRCULAIRE



## Etapes:

$$y[n] = x[n] \oplus h[n]$$

$$y[n] = x[n] \circledN h[n]$$

## Conditions:

1. Les longueurs  $M$  et  $N$  des  $x[n] = M$  et  $h[n] = N$  doivent être égaux
2. Si  $M \neq N$  alors  $(M-N)$  zéros doivent être ajoutés
3.  $L = \text{Max}(M, N)$

## Méthodes:

1. Méthode des cercles concentriques
2. Méthode des matrices

## Exemple:

$$h[n] = \{1, 2, 3\}, \quad x[n] = \{1, 2, -1, 1\}$$


# **CHAPITRE 4 : TRANSFORMATION EN Z**

**TD2/TP2:**

# Chapitre 5 :

# TRANSFORMATION DE FOURIER

1. Pour les signaux continue
  - Série de Fourier
  - Transformer de Fourier
2. Pour les signaux discret
  1. DTFT
  2. DFT
  3. FFT