



Institut Supérieur du Numérique  
Département Communication Numérique et Multimédia

# TECHNOLOGIE MULTIMÉDIA AVANCÉES

## PLAN:

**chapitre 1 : INTRODUCTION GÉNÉRALE AUX SIGNAUX MULTIMÉDIA**

**chapitre 2 : CLASSIFICATION DES SIGNAUX MULTIMÉDIA**

**chapitre 3 : TYPES DES SYSTÈMES**

**chapitre 4 : TRANSFORMATION EN Z**

**chapitre 5 : TRANSFORMATION DE FOURIER**

**chapitre 6 : MISE EN PRATIQUE AVEC DES LOGICIELS DE MULTIMÉDIA AVANCÉE**

EL BENANY Mohamed Mahmoud

[medmhdbennannu@gmail.com](mailto:medmhdbennannu@gmail.com)

# CHAPITRE 5 : TRANSFORMÉ DE FOURIER

1. Pour les signaux continue
  - Série de Fourier
  - Transformer de Fourier
2. Pour les signaux discret
  1. DTFT
  2. DFT
  3. FFT

# 1. Introduction

L'analyse de fourrier est utilisée pour convertir le domaine temporel au domaine fréquentiel d'un signal continue. Dans ce contexte une analyse est utilisé, qui est la Série de fourrier

Pour cela deux sujet existants:

1. L'un pour les signaux continues
2. L'autre pour les signaux discrets

Les deux sont utilisés pour convertir : le domaine temporel au domaine fréquentiel d'un signal.

## **Dans le domaine fréquentiel:**

1. La simplification de signal est simple
2. Il donne la réponse fréquentiel complète du système
3. Comprendre le spectre et la phase du signal

### **Le signal son:**

300 Hz – 3400 Hz

0.3 kHz – 3.4 kHz

Dans cet intervalle fréquentiel

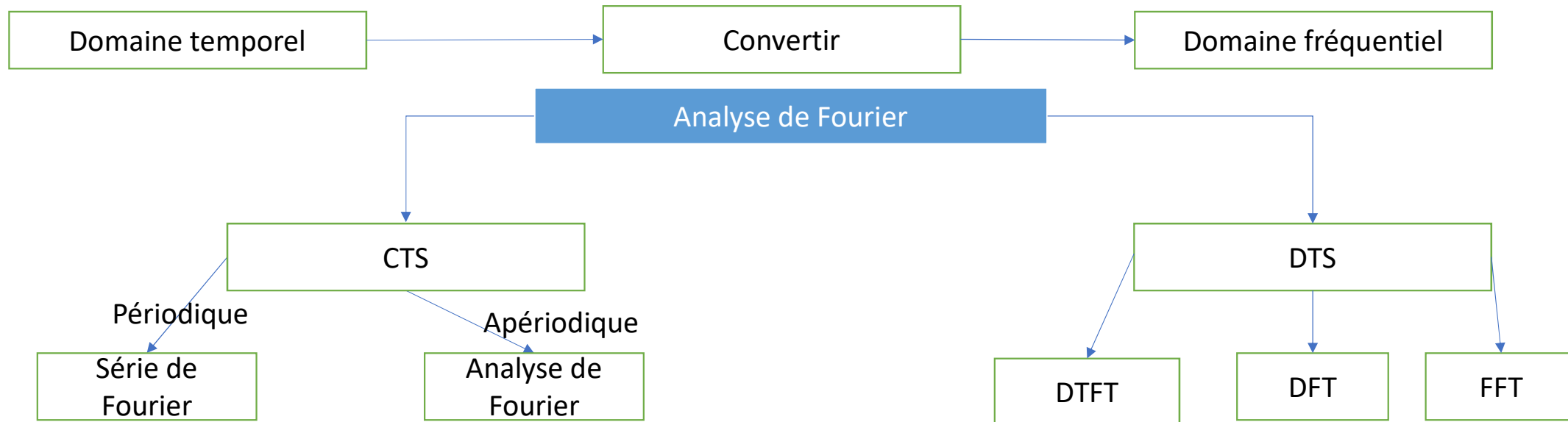
Le spectre du signal est max et constant: l'analyse complète est expliquer par la réponse fréquentielle seulement.

Donc, pour trouver l'intervalle de la fréquence du signal ou un système, et le spectre ou il est max = pour tout ces analyses la réponse fréquentiel est nécessaire

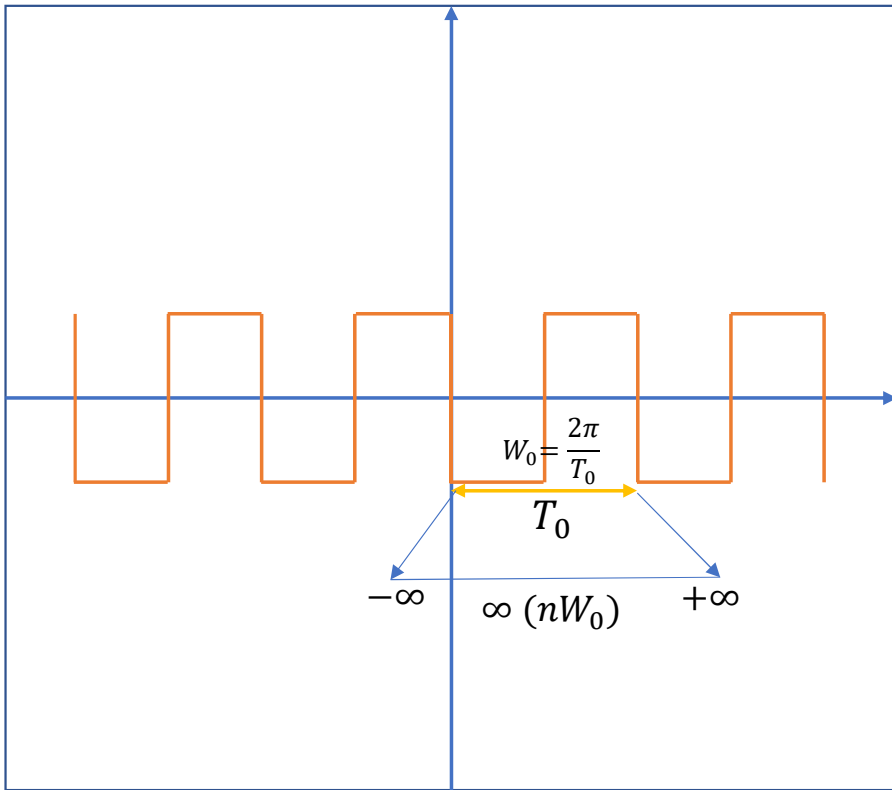
# 1. Introduction à l'analyse de Fourier

**Analyse de Fourier** est utiliser pour convertir le domaine temporel au domaine fréquentiel du signal

- **Pour les signaux continue:** Série de Fourier (pour les signaux périodique) et transformer Fourier (pour les signaux apériodique) sont utilisé
- **Pour les signaux discret:** DTFT, DFT et FFT



## 2. Sérier de Fourier: Objectifs

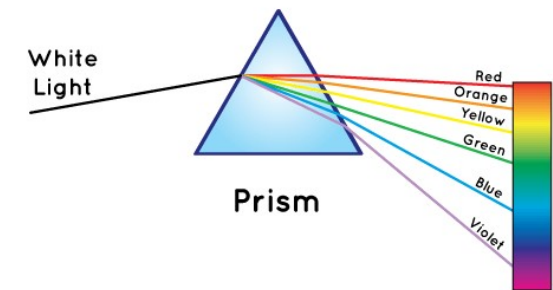


### Exemple: Pouvoir dispersif du prisme

La lumière est constituée de 7 couleurs, on peut les voir grâce à un prisme uniquement (Donc, le prisme sépare les couleurs constituant la lumière) ( $\Rightarrow$ ) **Série de Fourier** sépare les **composants** interne d'un signal (DC et AC (haute fréquence et basse fréquence)).

### Série de Fourier Objectifs

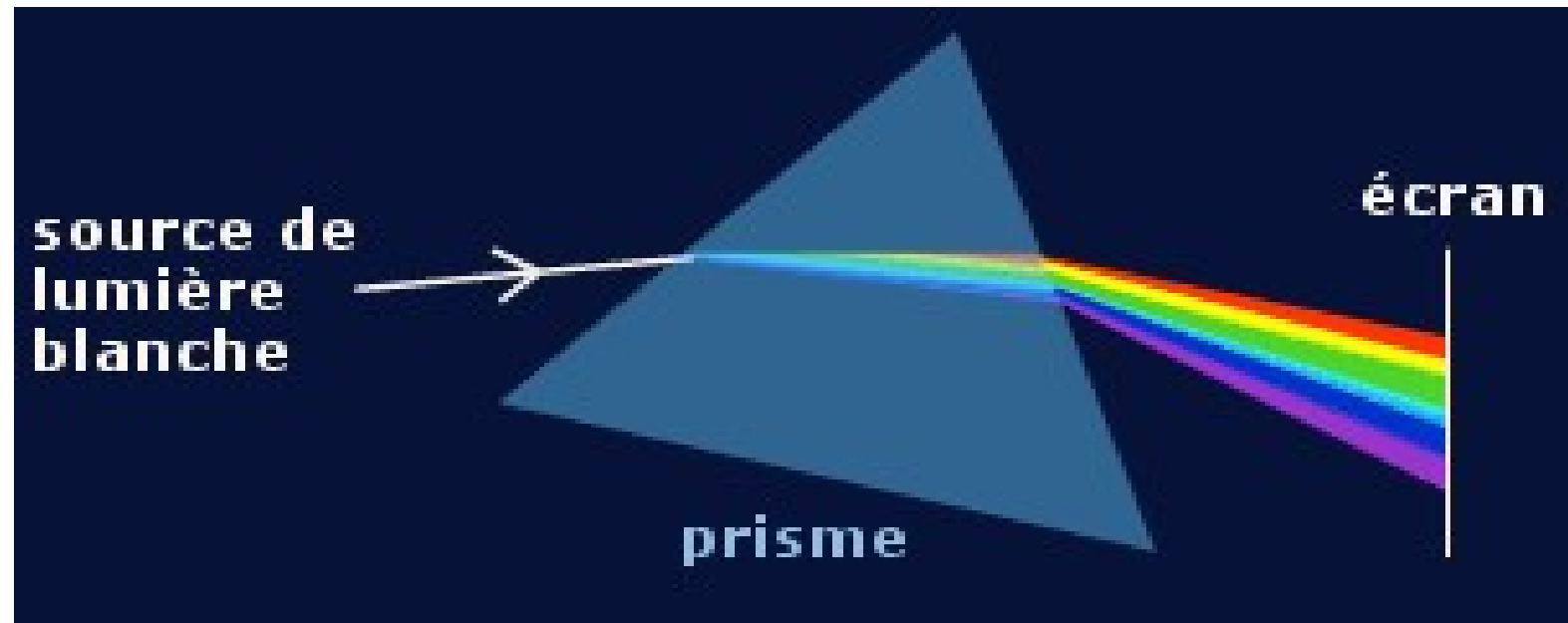
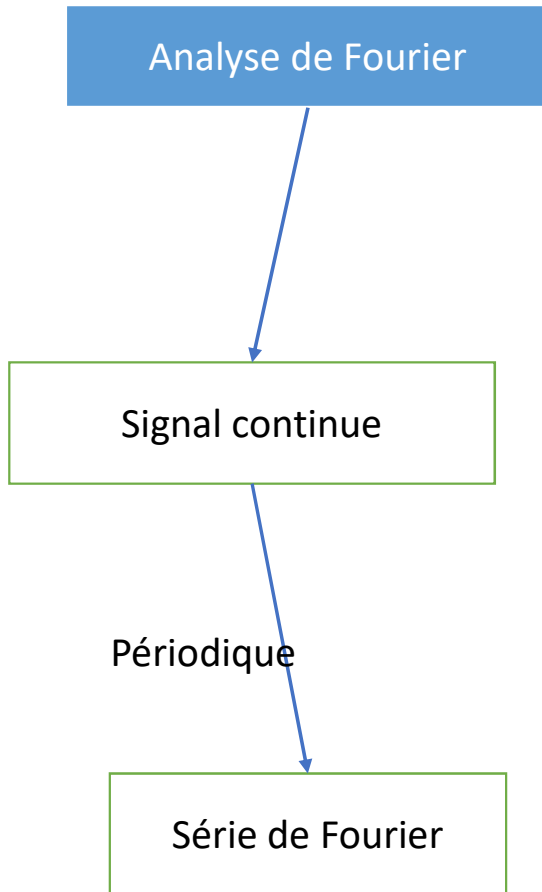
1. Permettre de trouver la réponse fréquentielle d'un signal **continue** et **périodique**
2. Convertir les signaux non sinusoïdaux aux signaux **sinusoïdaux**
3. Convertir **une fréquence en plusieurs fréquences** ( $w_0 = nw_0$ )
4. Séparer les **composants** DC et haute fréquence et basse fréquence d'un signal.



# 1. Introduction à l'analyse de Fourier

## Exemple:

- La **lumière** est une onde, chaque couleur a une longueur d'onde spécifique (Image coloré)
- Un prisme triangulaire permet de séparer la lumière blanche en 7 couleurs différentes
- **Sérier de Fourier** sépare les **composants** interne d'un signal (DC et AC( haute fréquence et basse fréquence.



# 1. Sérier de Fourier : Méthodes

## Sérier de Fourier Méthodes

Pour l'extensions d'**une fréquence en plusieurs fréquences** ( $w_0 = nw_0$ ) deux méthode sont utilisées:

1. Sérier de Fourier réel( trigonométrique - TFS)
2. Sérier de Fourier complexe(exponentiel - EFS)

La technique utilisée dans les deux méthode précédentes est appelé **signaux perpendiculaire** ou **signaux orthogonaux** (phase  $\emptyset=90^\circ$ )

Si les signaux sont perpendiculaire alors  $\int_T x_1(t) x_2(t) dt=0$ ,

$$\int_T \sin(mx) dx=0$$

$$\int_T \cos(mx) dx=0$$

$$\int_T \sin(mx)\cos(mx)dx=0,$$

TFS extend  $x(t)$  en une infinité de période

$$TFS = x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nw_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nw_0 t)$$

Le terme DC

Le terme AC (HF et BF)

# 1. Sérier de Fourier réel: Trigonométrie - TFS

TFS permet l'extension de  $x(t)$  en une infinité de période

$$TFS = x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nw_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nw_0 t)$$

Les coefficients de la méthode TFS:

1.  $a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt = \frac{\text{surface}}{\text{distance}} = \text{moyenne du signal}$

$a_0$  = Le terme DC pure, car il y a pas de fréquence

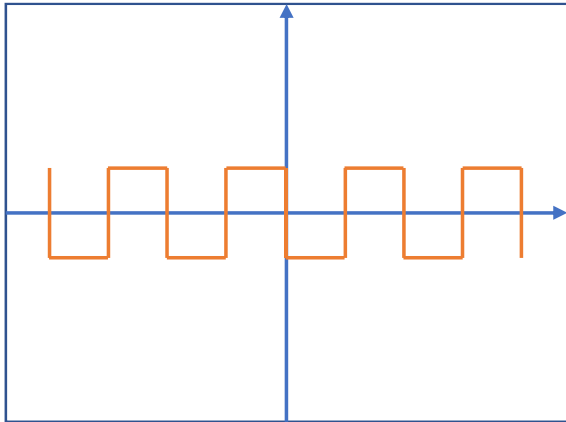
2.  $a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos(nw_0 t) dt$

$a_n$  et  $b_n$  = Le terme AC du signal, de pend de fréquence

3.  $b_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin(nw_0 t) dt$

# TD

## Exercice: Problème de TFS



Pour trouver la série de Fourier d'un signal, le signal doit satisfaire une condition (**signal doit être périodique**):

Donc:

1. Etape 1: Trouver la période  $T_0$  du signal et calculer  $w_0$
2. Etape 2: Trouver la représentation fonctionnelle  $x(t)$  du signal
3. Etape 3: trouver les coefficients de TFS

$$TFS = x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nw_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nw_0 t)$$

$$1. \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$$

$$2. \quad a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos(nw_0 t) dt$$

$$3. \quad b_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin(nw_0 t) dt$$

1. **Etape 1**: Trouver la période  $T_0$

$$T_0 = 2 \text{ sec}, w_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi \text{ rad/s}$$

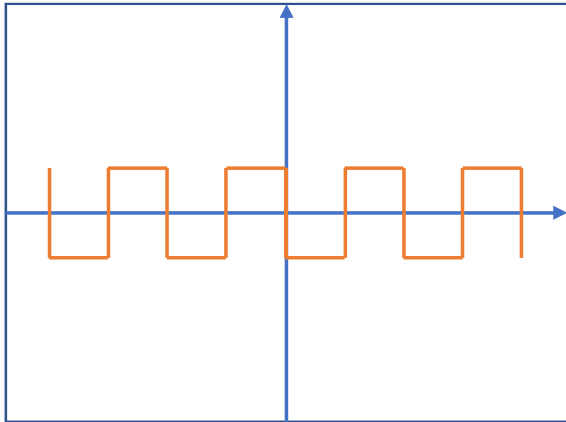
2. **Etape 2**: Trouver la représentation fonctionnelle du signal

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

1. **Etape 3**: trouver les coefficients de TFS

# TD

## Exercice: Problème de TFS



$$1. \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$$

$$2. \quad a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$3. \quad b_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

1. **Etape 1:** Trouver la période  $T_0$

$$T_0 = 2 \text{ sec}, \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi \text{ rad/s}$$

2. **Etape 2:** Trouver la représentation fonctionnelle du signal

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

1. **Etape 3:** trouver les coefficients de TFS

- $a_0 = \frac{1}{2} [0]$ , si le signal est symétrique, donc  $a_0$  est toujours null

- $a_n = \frac{1}{2} \left[ \frac{0-0-0-0}{n\pi} \right] = 0$  si le signal est impaire, (signal impaire  $a_n$  est toujours null)

- $b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ paire} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ impaire} \end{cases}$

*$x(t)$  est impaire donc TFS consiste uniquement pour les termes sin impaire*

## 1. Exercice - TFS

Trouver les quatres types de symétrie qui peuvent aider à évaluer les coefficients de Fourier **EFS** :

1. Symétrie paire
2. Symétrie impaire
3. Symétrie demi-onde
4. Symétrie quart-d'onde

# 1. Sérier de Fourier complexe(exponentiel - EFS)

## Sérier de Fourier complexe (exponentiel - EFS)

$$EFS = x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-jnw_0 t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jnw_0 t} dt$$

### Exercice:

- › Démontrer que l'expression de EFS est dérivée de TFS

## Relation entre EFS et TFS

### Exercice:

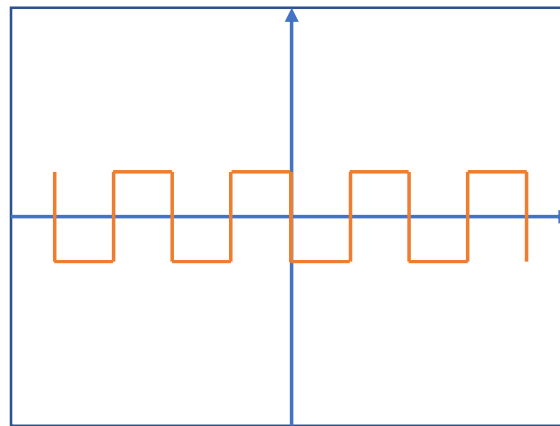
- › Trouver la relation entre les coefficients de TFS et celles de EFS

## TD

### Exercice: Problème de EFS

#### Exercice:

- › Trouver la relation entre les coefficients  $C_n$  de EFS pour signal suivant.



Réponse:

- › 
$$C_n = \frac{1 - (-1)^n}{jn\pi}$$

# Transformer de Fourier à partir de la série de Fourier

## série de Fourier → Transformer de Fourier

Les limitations de la série de Fourier :

1. Série de Fourier ne donne pas la représentation complète du domaine fréquentiel (Série de Fourier contient aussi le paramètre  $t$ )
2. Le domaine fréquentiel est discret et non continu.

$$C_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j n \omega_0 t} dt$$

$$FT[x(t)] = X[\omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j \omega t} dt$$



# Transformer de Fourier

Domaine temporel

$x(t)$

FT

Domaine fréquentiel

$X[x(t)]$   $X[f]$  ou  $X[w]$

## Limitation de FT:

- Application uniquement pour les signaux à Energy ou les signaux Stable

$$FT[x(t)] = X[w] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$IFT[X[w]] = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X[w] e^{j\omega t} d\omega$$

$$\bullet \quad \omega = 2\pi f$$

$$IFT[X[w]] = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X[f] e^{j2\pi ft} df$$

# Transformer de Fourier

Domaine temporel

$x(t)$

FT

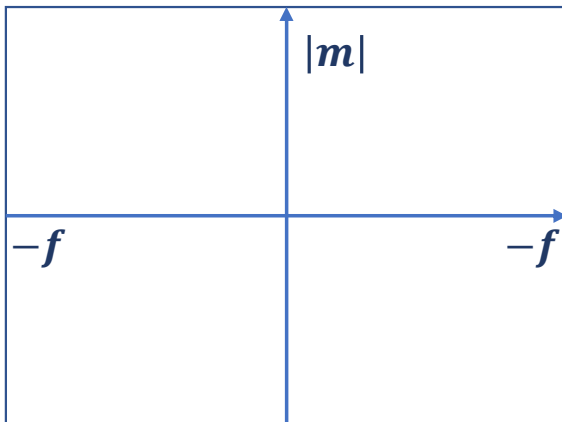
Domaine fréquentiel

$X[x(t)]$   $X[f]$  ou  $X[\omega]$

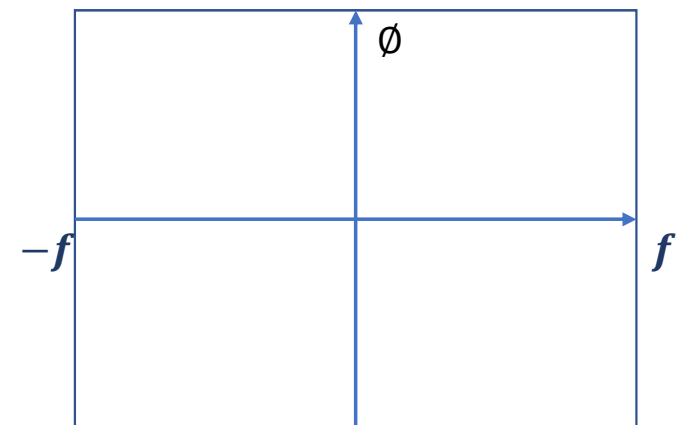
La réponse fréquentielle:

1. Spectre d'amplitude
2. La phase

Spectre d'amplitude



La phase



# TP: Transformer de Fourier

Domaine temporel

Domaine fréquentiel

$x(t)$

FT

$X[x(t)]$   $X[f]$  ou  $X[w]$

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

$$FT[x(t)] = X[w] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jwt} dt$$

$$FT[x(t)] = X[w] = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-jwt} dt$$

$$FT[x(t)] = X[w] = \int_0^{+\infty} e^{-at-jwt} dt$$

$$FT[x(t)] = X[w] = \int_0^{+\infty} e^{-t(a+jw)} dt$$

$$FT[x(t)] = X[w] = \frac{1}{a + jw}$$

$$FT[e^{-at}u(t)] = X[w] = \frac{1}{a + jw}$$

# TP: Transformer de Fourier

Domaine temporel

$x(t)$

FT

Domaine fréquentiel

$X[x(t)]$   $X[f]$  ou  $X[w]$

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

$$FT[e^{-at}u(t)] = X[w] = \frac{1}{a + jw}$$

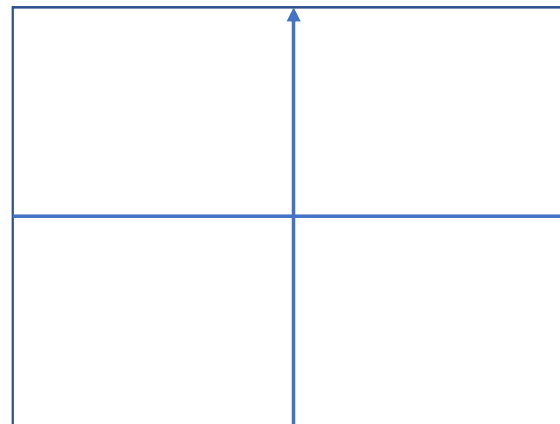
Faire la représentation graphique de la réponse fréquentielle:

1. Spectre d'amplitude
2. La phase

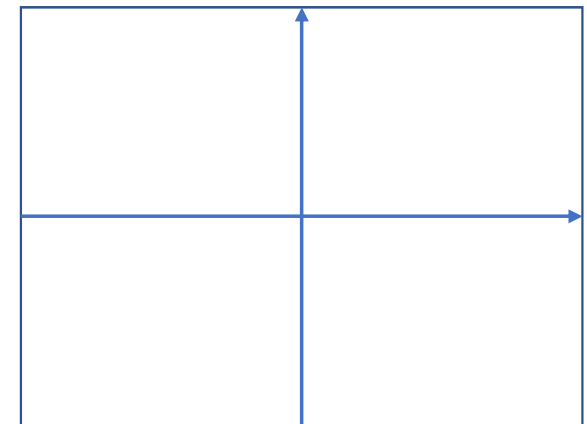
$$a + jw \rightarrow |m| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a + jw \rightarrow \phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Spectre d'amplitude



La phase



## Exercices: Trouver la TF des signaux suivants

**Exercice:**

$$\succ x(t) = A * \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

## Propriétés de TF

### Etudier les propriétés suivantes de la TF:

1. Linéarité:
2. Décalage temporel
  - Retard
  - Avance
3. Changement d'échelle
4. Théorème de la valeur initiale
5. Dérivation dans le domaine  $z$
6. Convolution à temps
7. Différenciation
8. Accumulation
9. Théorème de la valeur finale

# Problème de TF

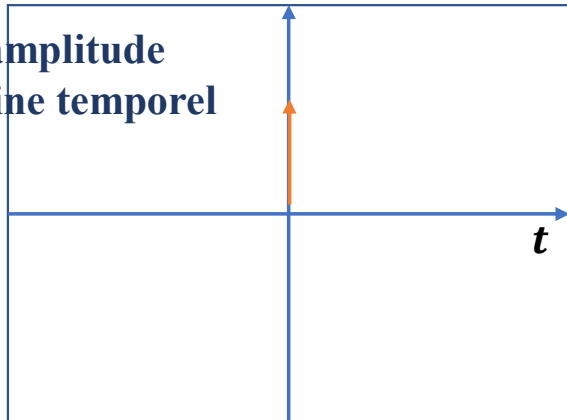
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0) dt = x(t_0)$$

$\delta(t)$  est le signal impulsionnel

$$FT[\delta(t)] = X[w] = \int_0^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega(0)} = 1$$

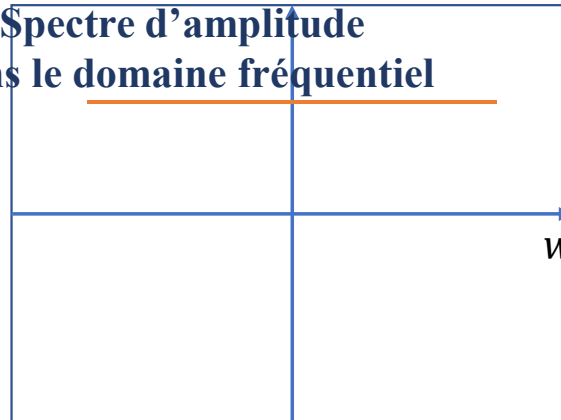
$\delta(t)$

Spectre d'amplitude  
Dans le domaine temporel



$FT[\delta(t)] = X[w]$

Spectre d'amplitude  
Dans le domaine fréquentiel



- $FT[x(t)] = X[w]$
- **Décalage de temps:**
- $FT[x(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0}X[w]$
- **Décalage de fréquence:**
- $FT[x(t)e^{j\omega t}] = X[w-w_0]$
- $FT[\delta(t)] = 1$
- $FT[\delta(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0}$
- **Dualité:**
- $FT[x(t)] = X[w]$
- $FT[X[w]] = 2\pi x(-w)$

• **Dualité:**

- $FT[\delta(t)] = 1$
- $FT[1] = 2\pi\delta(-w) = 2\pi\delta(w)$

# Problème de TF II

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0) dt = x(t_0)$$

$\delta(t)$  est le signal impulsionnel

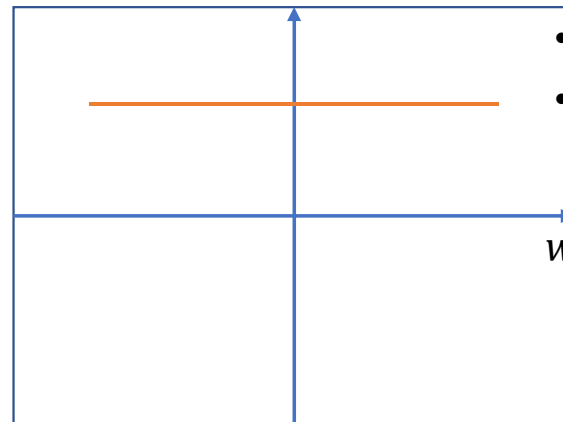
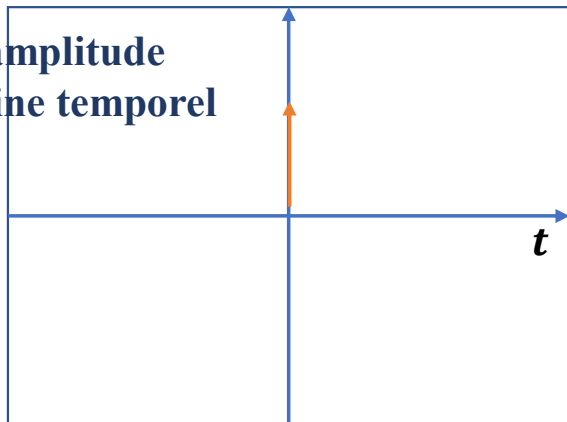
$$FT[\delta(t)] = X[w] = \int_0^{+\infty} \delta(t)e^{-jwt} dt = e^{-jw(0)} = 1$$

$\delta(t)$

$FT[\delta(t)] = X[w]$

Spectre d'amplitude

Dans le domaine temporel



- *Dualité:*
- $FT[\delta(t)] = 1$
- $FT[1] = 2\pi\delta(-w) = 2\pi\delta(w)$

- $FT[x(t)e^{jwt}] = X[w - w_0]$
- $FT[e^{jwt}] = X[w - w_0]$
- $FT[e^{jwt}] = 2\pi\delta(w - w_0)$
- $FT[e^{-jwt}] = X[w + w_0]$
- $FT[e^{-jwt}] = 2\pi\delta(w + w_0)$

- Calculer  $FT[\cos(w_0 t)]$
- Calculer  $FT[\sin(w_0 t)]$
- Calculer la TF de  $x(t) = \frac{2}{1+t^2}$

# Exercices

- Trouver la transformée de Fourier des signaux de base.
  - Calculer  $FT[\cos(\omega_0 t)]$
  - Calculer  $FT[\sin(\omega_0 t)]$
  - Calculer la TF de  $x(t) = \frac{2}{1+t^2}$

$\omega$