

# Chapitre 5 : Transformée de Fourier

## Introduction, Propriétés et Applications

EL BENANY Mohamed Mahmoud

Institut Supérieur du Numérique

# Objectifs du chapitre

À la fin de ce chapitre, vous serez capable de :

- Comprendre la classification et les propriétés des signaux.
- Maîtriser les notions de base du traitement du signal.
- Appliquer la Transformée de Fourier pour analyser les signaux.

# Plan du chapitre

- Introduction à l'analyse de Fourier
- Séries de Fourier
- Transformée de Fourier
- Applications pratiques

# Introduction à l'analyse de Fourier

L'analyse de Fourier permet de convertir un signal du domaine temporel au domaine fréquentiel. Elle est utilisée pour :

- Simplifier l'analyse des signaux.
- Obtenir la réponse fréquentielle d'un système.
- Comprendre le spectre et la phase d'un signal.

- **Signaux continus** : Analysés avec la Série de Fourier (périodiques) et la Transformée de Fourier (apériodiques).
- **Signaux discrets** : Analysés avec la DTFT, DFT et FFT.

Les séries de Fourier décomposent un signal périodique en une somme de sinusoides :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

- $a_0$  : Composante continue (DC).
- $a_n, b_n$  : Coefficients des harmoniques.

# Exemple : Série de Fourier

Soit un signal périodique  $x(t)$  défini par :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

- Période  $T_0 = 2$  secondes.
- Fréquence fondamentale  $\omega_0 = \pi$  rad/s.

La Transformée de Fourier d'un signal  $x(t)$  est définie par :

$$X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Elle permet de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel.

# Propriétés de la Transformée de Fourier

- **Linéarité** :  $FT[ax(t) + by(t)] = aX(w) + bY(w)$ .
- **Décalage temporel** :  $FT[x(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} X(w)$ .
- **Décalage fréquentiel** :  $FT[x(t)e^{j\omega_0 t}] = X(w - \omega_0)$ .
- **Convolution** :  $FT[x(t) * y(t)] = X(w) \cdot Y(w)$ .

# Exemple : Transformée de Fourier

Soit un signal  $x(t) = e^{-at}u(t)$ , où  $u(t)$  est la fonction échelon unité. Sa transformée de Fourier est :

$$X(w) = \frac{1}{a + jw}$$

- Spectre d'amplitude :  $|X(w)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + w^2}}$ .
- Phase :  $\phi(w) = -\arctan\left(\frac{w}{a}\right)$ .

La Transformée de Fourier est utilisée pour :

- Analyser les fréquences spatiales dans une image.
- Filtrer les bruits ou détecter les contours.

En audio, la Transformée de Fourier permet :

- D'analyser les fréquences d'un signal sonore.
- De filtrer des fréquences indésirables.

# Exercice 1 : Série de Fourier

Soit un signal périodique  $x(t)$  défini par :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

- Trouver la période  $T_0$  et la fréquence fondamentale  $\omega_0$ .
- Calculer les coefficients  $a_0$ ,  $a_n$  et  $b_n$ .

## Exercice 2 : Transformée de Fourier

Soit un signal  $x(t) = e^{-at}u(t)$ , où  $u(t)$  est la fonction échelon unité.

- Calculer la transformée de Fourier  $X(w)$ .
- Tracer le spectre d'amplitude  $|X(w)|$ .

## Exercice 3 : Filtrage

Soit un signal  $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$ , où  $f_1 = 10$  Hz et  $f_2 = 50$  Hz.

- Calculer la transformée de Fourier  $X(w)$ .
- Appliquer un filtre passe-bas pour éliminer les fréquences supérieures à 20 Hz.

- La Transformée de Fourier est un outil puissant pour l'analyse des signaux.
- Elle permet de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel.
- Elle a des applications en traitement d'image, audio, et bien d'autres domaines.