

Chapitre 5 : Transformée de Fourier

Série d'exercices

EL BENANY Mohamed Mahmoud

Notations

1. Notations fondamentales

- $x(t)$: Signal continu dans le domaine temporel.
- $X(w)$: Transformée de Fourier du signal $x(t)$ dans le domaine fréquentiel.
- w : Fréquence angulaire (en rad/s), $w = 2\pi f$.
- f : Fréquence (en Hz).
- T : Période d'un signal périodique.
- w_0 : Fréquence fondamentale d'un signal périodique, $w_0 = \frac{2\pi}{T}$.
- $\delta(t)$: Impulsion de Dirac.
- $\text{rect}(t)$: Fonction rectangulaire.
- $\text{sinc}(x)$: Fonction sinus cardinal, $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

2. Définitions

1. Transformée de Fourier (FT) :

$$X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

Convertit un signal du domaine temporel au domaine fréquentiel.

2. Transformée de Fourier inverse (IFT) :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(w)e^{j\omega t} dw$$

Reconstruit un signal à partir de sa transformée de Fourier.

3. Série de Fourier (TFS) :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nw_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nw_0 t)$$

Décompose un signal périodique en une somme de sinusoides.

4. Transformée de Fourier discrète (DFT) :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Utilisée pour les signaux discrets.

3. Propriétés de la Transformée de Fourier

1. Linéarité :

$$FT[ax(t) + by(t)] = aX(w) + bY(w)$$

2. Décalage temporel :

$$FT[x(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} X(w)$$

3. Décalage fréquentiel :

$$FT[x(t)e^{j\omega_0 t}] = X(w - w_0)$$

4. Changement d'échelle :

$$FT[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{w}{a}\right)$$

5. Convolution :

$$FT[x(t) * y(t)] = X(w) \cdot Y(w)$$

6. Dualité :

$$FT[X(t)] = 2\pi x(-w)$$

4. Théorèmes

1. Théorème de Parseval :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(w)|^2 dw$$

L'énergie du signal est conservée dans les deux domaines.

2. Théorème de la valeur initiale :

$$x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(w) dw$$

3. Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{w \rightarrow 0} jwX(w)$$

Série d'exercices

Exercice 1 : Série de Fourier (TFS)

Soit un signal périodique $x(t)$ défini sur une période $T = 2$ secondes par :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

1. Trouver la période T_0 et la fréquence fondamentale w_0 .
2. Calculer les coefficients a_0 , a_n et b_n de la série de Fourier trigonométrique (TFS).

Exercice 2 : Transformée de Fourier (FT)

Soit un signal $x(t) = e^{-at}u(t)$, où $u(t)$ est la fonction échelon unité et $a > 0$.

1. Calculer la transformée de Fourier $X(w)$ de ce signal.
2. Donner l'expression de $X(w)$ et interpréter le résultat.

Exercice 3 : Propriétés de la Transformée de Fourier

Soit un signal $x(t) = \cos(w_0 t)$.

1. Calculer la transformée de Fourier $X(w)$ de ce signal.
2. Utiliser la propriété de dualité pour vérifier le résultat.

Exercice 4 : Transformée de Fourier discrète (DFT)

Soit un signal discret $x[n] = \{1, 0, -1, 0\}$ pour $n = 0, 1, 2, 3$.

1. Calculer la transformée de Fourier discrète (DFT) $X[k]$ de ce signal.
2. Interpréter le résultat.

Exercice 5 : Transformée de Fourier d'un signal rectangulaire

Soit un signal rectangulaire $x(t) = A \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$, où $\text{rect}(t)$ est une fonction rectangulaire définie par :

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Fourier $X(w)$ de ce signal.
2. Tracer le spectre d'amplitude $|X(w)|$.

Exercice 6 : Transformée de Fourier d'une impulsion de Dirac

Soit une impulsion de Dirac $x(t) = \delta(t)$.

1. Calculer la transformée de Fourier $X(w)$ de ce signal.
2. Interpréter le résultat.

Exercice 7 : Filtrage dans le domaine fréquentiel

Soit un signal $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$, où $f_1 = 10$ Hz et $f_2 = 50$ Hz.

1. Calculer la transformée de Fourier $X(w)$ de ce signal.
2. Si on applique un filtre passe-bas qui élimine toutes les fréquences supérieures à 20 Hz, quel sera le signal résultant $y(t)$?

Exercice 8 : Application en traitement d'image

Soit une image représentée par une fonction $f(x, y)$ dont la transformée de Fourier 2D est $F(u, v)$.

1. Expliquer ce que représente $F(u, v)$ dans le domaine fréquentiel.
2. Si on applique un filtre passe-bas sur $F(u, v)$, quel effet cela aura-t-il sur l'image $f(x, y)$?